Appendice: le equazioni di Maxwell

Il fisico scozzese James Clerk Maxwell (Edimburgo 1831- Cambridge 1879) cercò di individuare le equazioni fondamentali per descrivere completamente tutti i fenomeni elettromagnetici. In altre parole, egli cercava per i campi elettrici e magnetici qualcosa di analogo alle leggi di Newton per la meccanica. Le leggi di Gauss per il campo elettrico e per il campo magnetico, quella di Ampère e quella di Faraday costituivano un insieme di equazioni che permettevano di affrontare un gran numero di situazioni riguardanti i campi elettrici e magnetici. Per questo motivo Maxwell le analizzò, per verificare se erano sufficienti a descrivere e risolvere qualsiasi problema che riguardasse i campi elettrici e magnetici. Ricordiamo queste quattro equazioni.

Dalle equazioni di Maxwell alle onde elettromagnetiche

	Campo elettrico, E	Campo magnetico, B
Flussi dei campi	$\oint E \bullet dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (1) Legge di Gauss per il campo elettrico	$\oint B \bullet dS = 0$ (2) Legge di Gauss per il campo magnetico
Circuitazioni dei campi	$\oint E \bullet dl = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (3) Legge dell'induzione elettromagnetica (o di Faraday)	$\oint B \bullet dl = \mu_0 \Phi(J)$ (4) Legge di Ampere generalizzata (*J* = *E*)

I teoremi Gauss per i campi elettrici e magnetici permettono di quantificare gli effetti globali del flusso dei campi E e B. La legge dell'induzione elettromagnetica permette di determinare gli effetti elettrici delle variazioni di campo magnetico. Il teorema di Ampere correla gli effetti magnetici con le correnti che li producono.

Stiamo osservando in tabella la rappresentazione matematica, riordinata da Maxwell, dei fenomeni di elettromagnetismo che abbiamo discusso durante il corso. La struttura di un campo elettrico viene rappresentata mediante linee di forza che o vanno da una sorgente elettrostatica ad un'altra di segno opposto o si perdono nell'infinito. Anche la direzione e il verso del campo magnetico si possono rappresentare con le linee di forza, definite le due polarità di un campo magnetico o di un magnete, il verso del campo è quello che va dalla polarità sud alla polarità nord.

Nel campo elettrico, tali linee di forza possono essere aperte o chiuse, a seconda delle sorgenti del campo; ad esempio, una carica elettrica isolata nello spazio genera intorno a sé un campo con linee di forza aperte – semirette disposte a raggiera intorno alla carica; una coppia di cariche di segno opposto, invece, genera un campo con linee di forza chiuse, che nascono da una delle due cariche e muoiono sull’altra. Il Teorema di Gauss serve a determinare, basandosi su questi principi, il flusso di un campo attraverso una superficie chiusa. Si definisce flusso di un vettore uniforme attraverso una superficie il prodotto vettoriale dell'intensità del vettore V (componente perpendicolare ad A) per l'area A della superficie S. Si definisce circuitazione di un vettore V lungo una linea chiusa l l'integrale circolare: $\oint V x dl$ dove dl è il generico elemento di modulo unitario, tangente alla linea *l*.

1) Legge di Gauss per il campo elettrico il flusso del vettore campo elettrico uscente da una superficie è dato dal rapporto fra la carica totale contenuta nella superficie stessa e il valore della costante dielettrica del mezzo materiale in cui la superficie si trova.

A differenza del campo elettrico, il campo magnetico può avere esclusivamente linee di forza chiuse. Questa importante proprietà discende dal fatto che non esiste il monopolo magnetico. Una conseguenza di ciò è che il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è sempre nullo: il numero di linee di forza che attraversano la superficie in entrata è esattamente uguale a quello delle linee di forza in uscita. Questa affermazione è matematicamente rappresentata attraverso **(2)** la **Legge di Gauss per il campo magnetico**.

Le restanti due equazioni riguardano la "circuitazione" dei campi elettrico e magnetico. Se immaginiamo i campi elettromagnetici come dovuti all'azione di forze, allora possiamo affermare che la circuitazione corrisponde al lavoro svolto dal campo nel percorrere il circuito. Ricordiamo che se la circuitazione di un campo lungo una qualunque linea chiusa *l* è uguale a zero, indipendentemente dal percorso scelto, allora quel campo si dice conservativo. Ma non è questo il caso dei campi elettromagnetici.

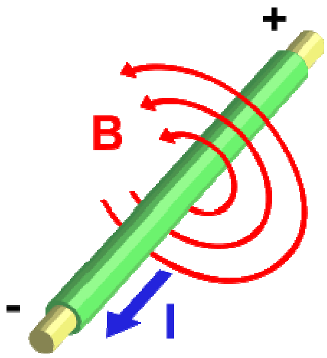
Infatti, secondo la **(3) Legge di Faraday** (detta anche di Faraday e Neumann) la circuitazione del campo elettrico – ovvero, la forza elettromotrice **ε** indotta in un circuito chiuso – è proporzionale alla rapidità con cui varia il flusso magnetico attraverso l'area sottesa dal circuito:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Il segno negativo (-) esprime la legge di Lenz, la quale afferma che la forza elettromotrice e la corrente indotte in un circuito hanno polarità tale da opporsi alla variazione che le ha prodotte (in conformità anche con il II principio della termodinamica). Questa formulazione matematica, analoga a quella riportata in tabella con n. 3, afferma che una variazione di flusso magnetico $\frac{d\Phi_B}{dt}$ attraverso un circuito chiuso genera nel circuito una forza elettromotrice **ε**, in quanto:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Analogamente, anche la presenza di un campo elettrico genera sempre un campo magnetico concatenato, ovvero, secondo la **(4) Legge di Ampere** (generalizzata) il campo magnetico che agisce lungo un cammino chiuso è concatenato con la corrente elettrica che attraversa la superficie che la linea stessa delimita. Il segno della corrente è positivo se il campo che essa genera ha lo stesso verso della linea concatenata, è negativo se il verso è opposto. Per completezza: la circuitazione del campo magnetico lungo un percorso chiuso che non ha alcuna corrente concatenata è nulla.



La legge di Ampère è una legge di natura, valida per tutti i campi magnetici e le correnti che sono costanti nel tempo. Per determinare matematicamente la circuitazione del campo magnetico (eq. 4), consideriamo un filo rettilineo percorso da corrente elettrica: sappiamo che questo determina un campo magnetico che ha linee di forza che consistono in circonferenze concentriche con centro sul filo e disposte su un piano perpendicolare al filo stesso. È ragionevole scegliere un cammino circolare di raggio *r* (ovvero una circonferenza di lunghezza $2\pi r$) per racchiudere il filo. Poiché il campo magnetico è parallelo al cammino circolare in ogni punto e tutti i punti sono alla stessa distanza dal filo, e poiché un filo rettilineo percorso da una corrente *I* stazionaria, cioè costante nel tempo, ha intensità:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I_s}{2\pi r}$$

A questo punto, il calcolo della circuitazione di *B* lungo il percorso $l = 2\pi r$ porta a ricavare quanto segue:

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot dl = \frac{\mu_o I_s}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_o I_s \qquad (eq.4.1$$

Ma questa è la soluzione valida per correnti stazionarie; aggiungendo considerazioni anche di “simmetria” rispetto all’equazione di Faraday, Maxwell giunse a comprendere che occorreva aggiungere un ulteriore termine al valore di corrente I_S indicato all’equazione (4), legato alla variazione del flusso del campo elettrico attraverso la superficie *S* delimitata dal circuito *l*. Dalla legge di Gauss per il campo elettrico (eq. 1) sappiamo che il flusso del campo elettrico E attraverso una superficie chiusa (considerata in questo caso come definita dalla parte interna del circuito attraverso cui *I* fluisce), è uguale a q/ε_0. Considerando la variazione nel tempo del flusso di E risulta:

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{q}{\varepsilon_0 t} = \frac{I}{\varepsilon_0} \quad \text{ovvero} \quad \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = I$$

Aggiungendo questo termine *dinamico* al valore di I_S riportato nell’eq. 4.1, risulta in definitiva

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot dl = \mu_o I_s + \varepsilon_o \mu_o \frac{d\Phi_E}{dt}$$

La curva *l* è una qualsiasi curva chiusa e *I* è la corrente che attraversa una qualsiasi superficie aperta, avente la curva *l* come contorno. Il secondo termine nella parte destra dell’equazione è detto *corrente di spostamento*, uguale a zero in casi stazionari. La conclusione è che non solo le correnti nei conduttori producono dei campi magnetici attorno ad essi, ma anche i campi elettrici variabili nel vuoto producono dei campi magnetici. Le implicazioni matematiche dell’eq. 4 portarono anche alla formulazione dell’ipotesi di esistenza delle onde elettromagnetiche, capaci di propagarsi nello spazio alla velocità della luce, *c*:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$