

Rivelazione dei segnali

filtraggio e correlazione

Introduzione

Nella rivelazione (misura) di deboli segnali dobbiamo curare due aspetti:

1. *elettronica a basso rumore*, schermi, ritorni di massa,...
(curare il front-end)!

2. "rivelazione del segnale" (signal recovery):

per riuscire a distinguere fra segnale rumore questi debbono avere qualche *caratteristica* che li differenzia.

Rivelazione del segnale

1. **filtraggio** (teoria statistica della stima)

ricostruzione della forma originale del segnale per consentire la stima di alcuni parametri: ampiezza, periodo,...

2. **correlazione** (teoria statistica della rivelazione)

rivelare la presenza di un segnale di forma nota senza ricostruire la sua forma.

Problema ?

Desideriamo ricostruire, o stabilire la presenza, di un segnale $s(t)$ attraverso una sua osservazione sperimentale $x(t)$ con

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

dove $n(t)$ è il rumore **additivo**.

Non sono presi in considerazione casi ad esempio di rumore *moltiplicativo* (esempio: fading o evanescenza dei segnali radio a causa di una variazione irregolare del mezzo - densità elettronica della ionosfera)

Soluzione ?

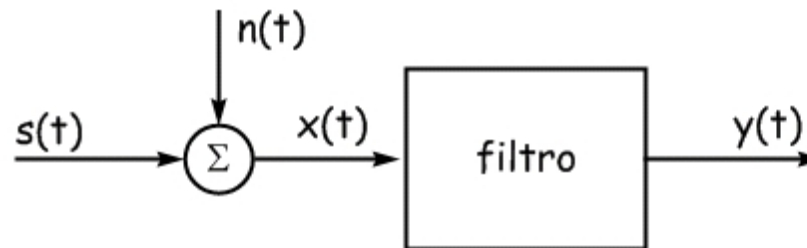
dipende dal tipo di "segnale": segnale armonico, impulsivo...

1. Filtri

filtraggio: media mobile e le sue patologie; filtro primo ordine,...

compito del filtro è quello di *eliminare le componenti spettrali del segnale $x(t)$ che non contengono alcuna informazione sul segnale $s(t)$* che intendiamo stimare.

Attenzione nella scelta del filtro al suo comportamento al rumore e ai disturbi (es. impulsivi).



Minimi quadrati (Gauss)

Stima di una grandezza **costante** s avendo a disposizione una serie di misure $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ in modo da **minimizzare** il valore atteso dello **scarto quadratico** $E[(x - \bar{s})^2]$: $\Rightarrow \bar{s} = E[x]$.

questo approccio richiede, almeno in linea di principio, la conoscenza di infiniti valori di misura x_j ; in pratica la stima si compie su un numero finito di osservazioni sperimentali e quindi con un'incertezza σ_x / \sqrt{n} (se i campioni sono indipendenti);

Minimizzando il valore assoluto dello scarto ?

anziché il valor medio, avremmo ottenuto la **mediana**.

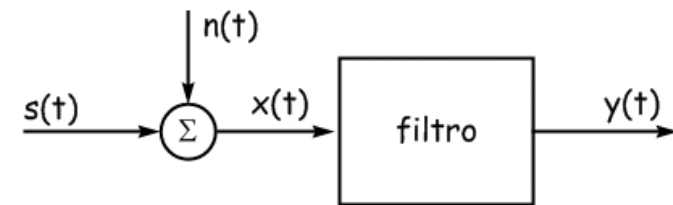
come operiamo nel caso di un segnale $x(t) = s + n(t)$?

($n(t)$ processo casuale con $E[n]=0$)

media \Rightarrow media temporale;

(in linea di principio su un tempo infinito,

in pratica su un'osservazione temporalmente finita).



*La varianza della stima di s dipende: dal tipo di filtro;
dalla statistica del rumore.*

$$\sigma_y^2 = R_y(\tau = 0) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ |H(f)|^2 S_n(f) \right\}$$

dove $H(f)$ è la funzione di trasferimento del filtro,

$S_n(f)$ è la densità spettrale del rumore $n(t)$.

media mobile (finestra mobile)

La forma più semplice di filtro che possiamo considerare è un integratore su un intervallo di tempo T (*voltmetro, contatore elettronico*):

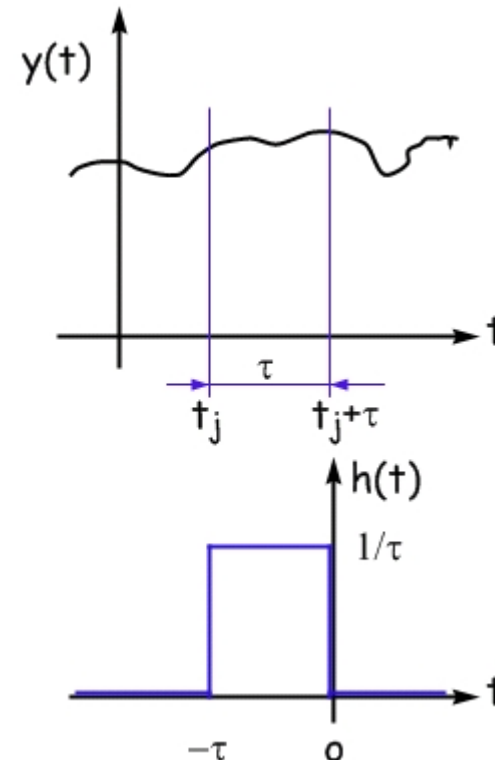
$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\alpha) d\alpha$$

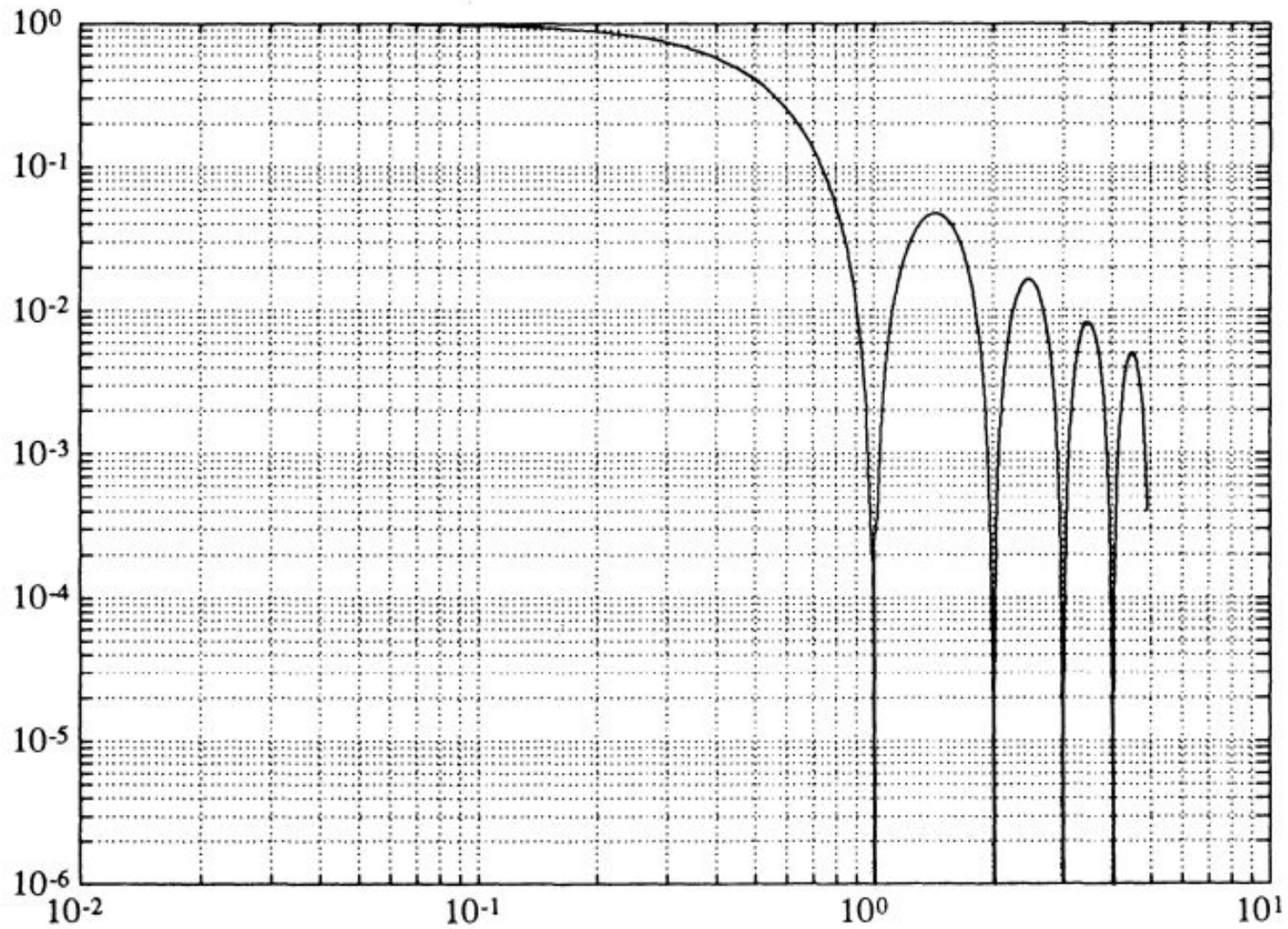
la risposta all'impulso per questo filtro è:

$$h(t) = \frac{1}{T} (u(t) - u(t - T))$$

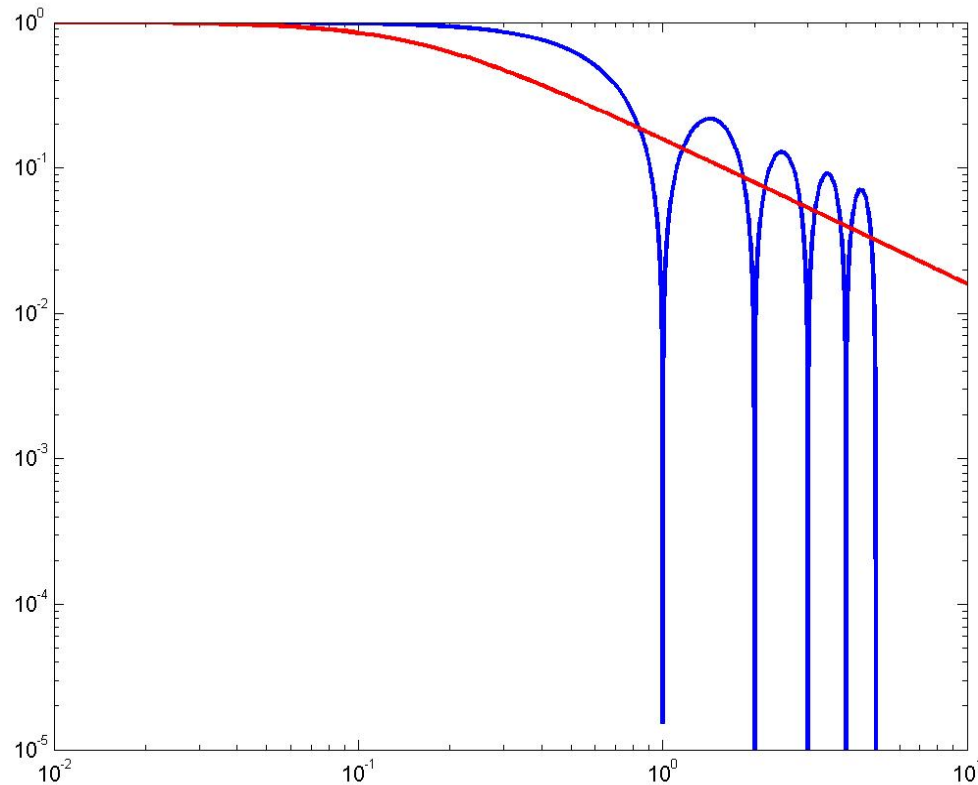
a cui corrisponde la funzione di

$$\text{trasferimento: } |H(f)|^2 = \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2$$





**filtro del primo ordine (filtro esponenziale, filtro autoregressivo, ...
...il solito filtro RC)**



l'altro filtro molto comune è quello del primo ordine con costante di tempo $\tau = RC$, con funzione di trasferimento:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi f RC)^2}$$

esempio

un caso interessante, sebbene poco realistico, è il caso di rumore **bianco a spettro limitato** (spettro bilatero):

$$S_n(f) = \sigma_n^2 / B, \quad \text{per } 0 \leq f \leq B \text{ e nulla altrove.}$$

La funzione di autocorrelazione è: $R_n(\tau) = \sigma_n^2 \cdot \left(\frac{\sin \pi B \tau}{\pi B \tau} \right)$

La funzione di autocorrelazione $R_n(\tau_i) = 0$ si annulla per $\tau_i = i/B$ (i intero > 0)

I campioni del rumore a distanza $\Delta\tau = 1/B$ sono fra loro scorrelati.

Sommando n di questi campioni, presi sul **tempo totale** $T = n/B$, oppure integrando su questo intervallo di tempo, la varianza della stima di s è:

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 / BT$$

Per un rumore con **spettro arbitrario** le cose si complicano;
è possibile dimostrare che la varianza della stima è data dall'espressione:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_x(\tau) d\tau$$

per intervalli di *tempo di osservazione* T sufficientemente lunghi possiamo approssimare l'espressione con

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{T} \int_{-T}^T R_x(\tau) d\tau$$

che per $T \rightarrow \infty$ si annulla (stima di s consistente, non polarizzata), come è desiderabile avvenga.

esempio

un caso più realistico è quello di un rumore bianco filtrato da un filtro passabasso del primo ordine:

$$S_n(f) = \frac{4RC}{1 + (2\pi f RC)^2} \sigma_n^2 \qquad R_n(\tau) = \sigma_n^2 \cdot e^{-|\tau|/RC}$$

in questo caso la varianza della stima di s , all'uscita del filtro è:

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 \frac{4RC}{T} \left(1 - \frac{RC}{T} \left(1 - e^{-|T|/RC} \right) \right)$$

che si riduce a $\sigma^2 = \sigma_n^2 \frac{4RC}{T}$ nel caso in cui il tempo di integrazione T è

molto maggiore della costante di tempo caratteristica RC (tempo di correlazione del rumore $n(t)$).

(questo ci conduce di nuovo al risultato che la banda equivalente di rumore per un sistema del primo ordine è $B_n = 1/4RC = (\pi/2) f_{-3dB}$)

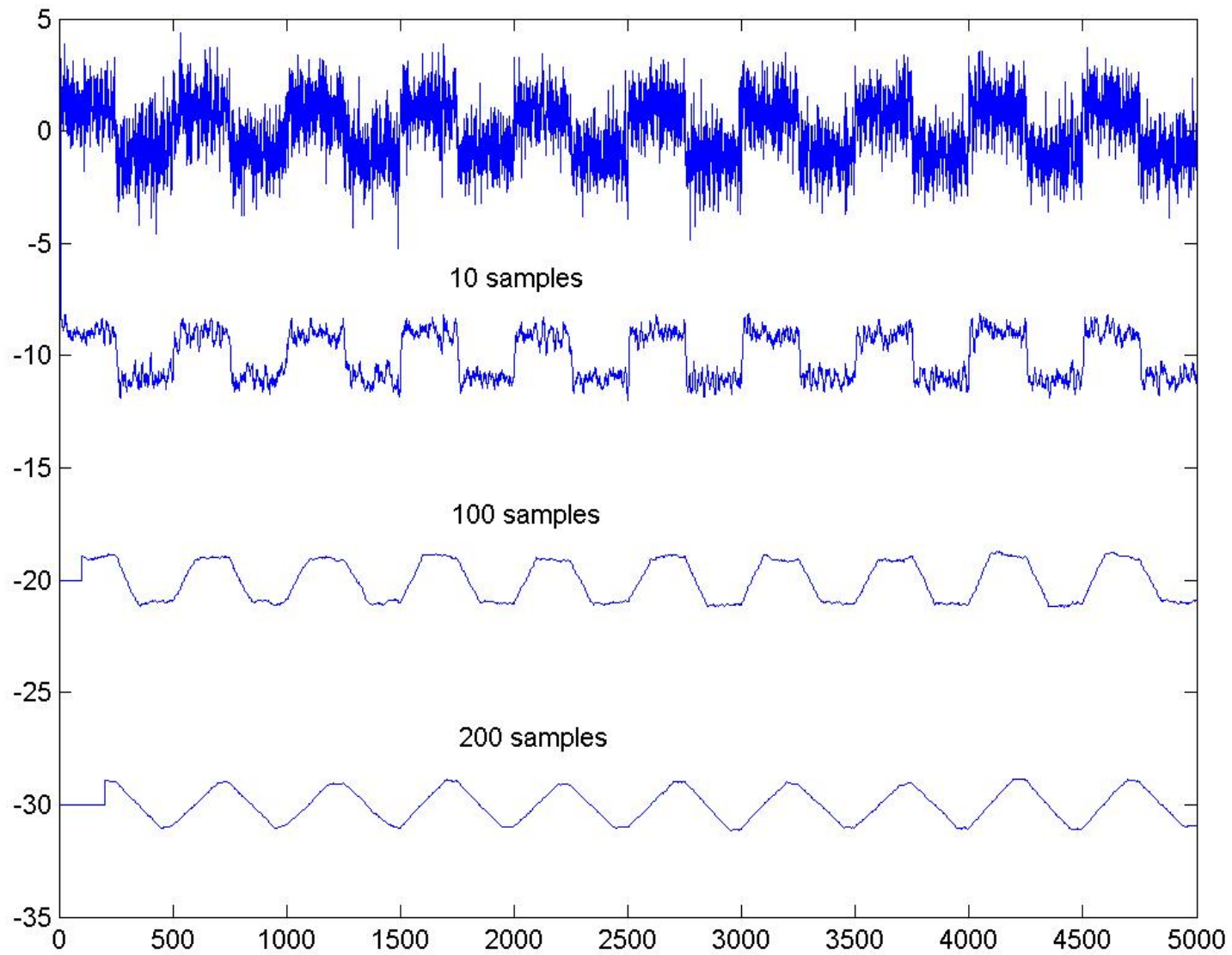
...questo tipo di filtri sono utili anche quando il segnale s non è una costante ma sia una **funzione del tempo** lentamente variabile rispetto al tempo di integrazione.

Il filtro svolge la funzione principale di eliminare componenti di alta frequenza del rumore;

consideriamo nuovamente il filtro a "finestra mobile":

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\alpha) d\alpha$$

il tempo di integrazione T deve essere sufficientemente piccolo rispetto alla rapidità di variazione del segnale.



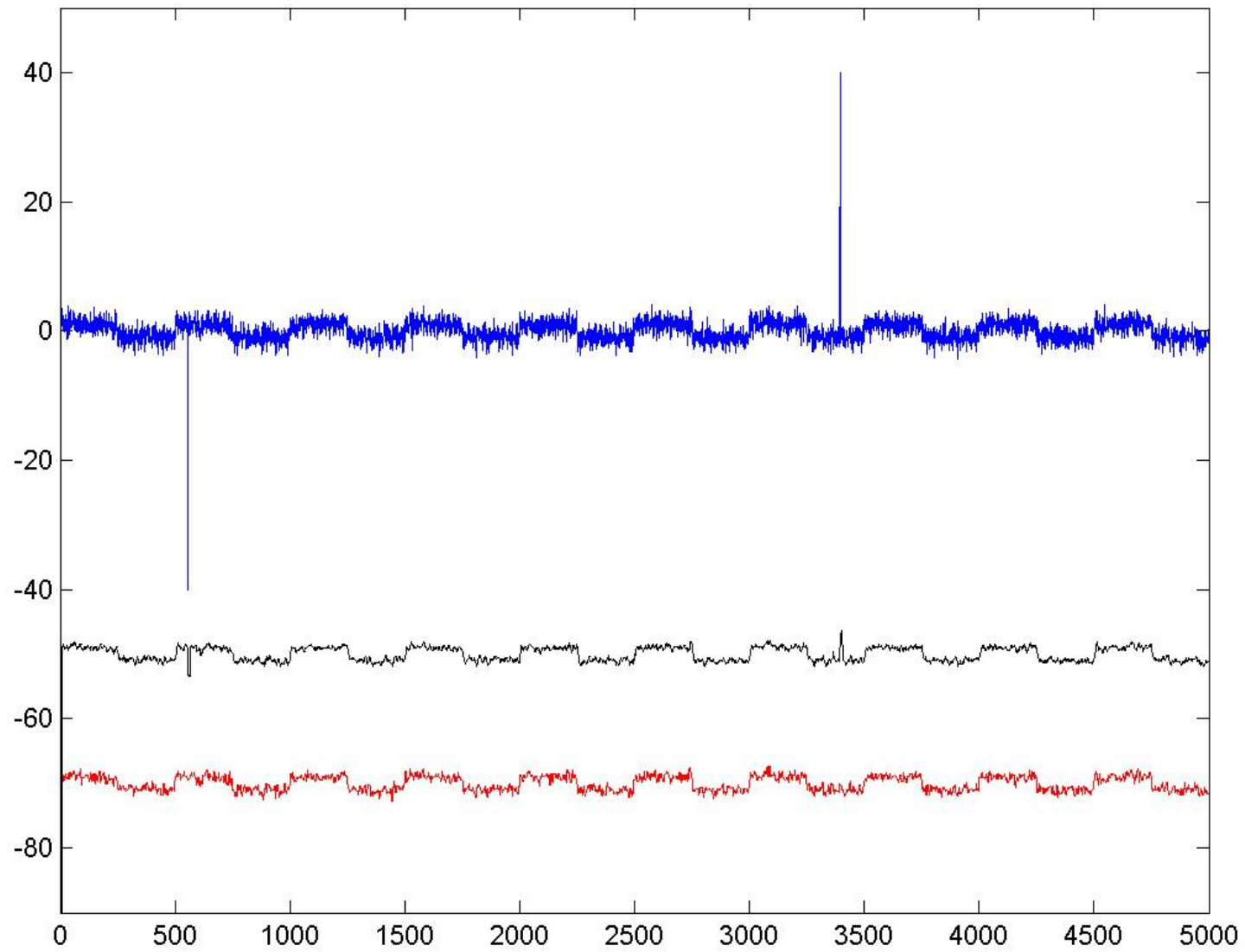
La figura riporta un segnale ad onda quadra di ampiezza unitaria a cui è stato sommato del rumore con distribuzione d'ampiezza di tipo gaussiano con varianza pari ad uno.

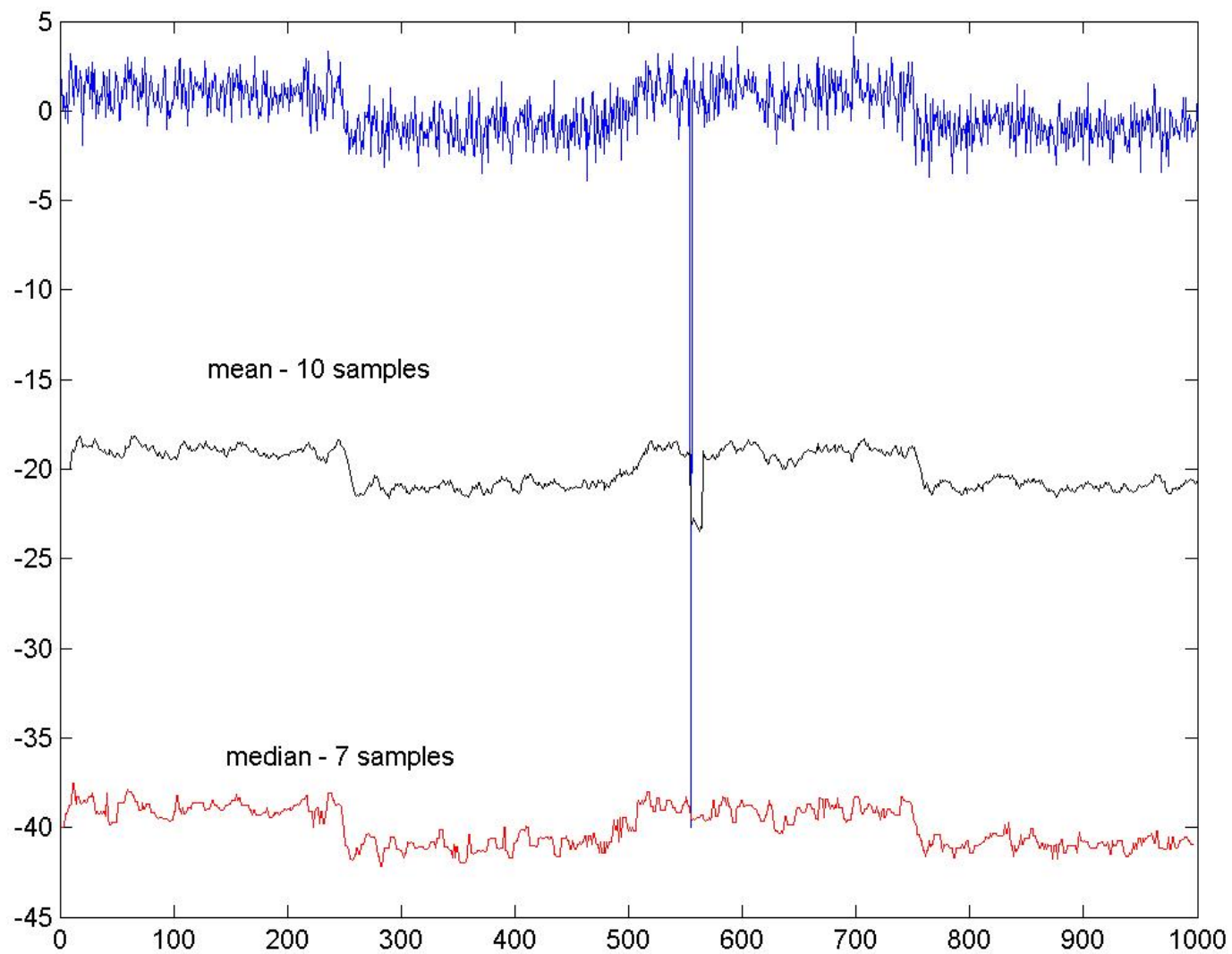
Sono riportati alcuni esempi di filtraggio con media mobile per tempi di integrazione T crescenti; quando il tempo di integrazione è confrontabile con il periodo dell'onda quadra, la deformazione dei fronti di salita e discesa è evidente.

Il filtro si comporta "bene" nel caso di fluttuazioni casuali; quando sono invece presenti disturbi impulsivi di grande ampiezza entra in crisi, la sua risposta contiene ancora questi contributi impulsivi...

...in questo caso possono risultare preferibili filtri *non-lineari*.

Un esempio è il filtro a mediana, di cui si riporta il comportamento per il caso precedente a cui si è aggiunto del rumore impulsivo.





in quest'ultimo grafico si può vedere in dettaglio il comportamento del filtro a media mobile in presenza dell'impulso e confrontarlo con la risposta del filtro a mediana.

- altre operazioni non lineari ?
 - a) filtro α : calcola il valor medio dei dati nell'intervallo T escludendo quei dati nella coda della distribuzione locale [$F(x) < \alpha$; $F(x) > 1-\alpha$];
 - b) clipper.
- **i filtri non-lineari offrono soluzioni ad hoc per problemi particolari;** la teoria relativa non ha carattere così generale come invece è per i filtri lineari.

nota → nei sistemi "real time" devo tener in debito conto del ritardo introdotto dal filtro...

Filtraggio lineare ottimo

Possiamo "progettare" un filtro che sfrutti in modo ottimale la diversa distribuzione in frequenza del segnale e del rumore.

Torniamo a considerare la stima di una costante s a partire da n osservazioni $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}$;

$$\hat{s} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

devo determinare le costanti a_i in modo da minimizzare l'errore quadratico medio $Q = E[(s - \hat{s})^2]$;

Principio di ortogonalità

$\min\{Q\}$ equivale a determinare le costanti a_i in modo tale che lo scarto (errore) sia ortogonale ai dati: $E[(s - \hat{s})x_i] = 0, \forall i$

...passando al caso più generale della stima dell'andamento del segnale $s(t)$ in base all'osservazione dell'andamento di $x(t) = s(t) + n(t)$ in un certo intervallo di tempo $t \in [a, b]$; sia il segnale da stimare sia il segnale misurato (l'osservazione) sono funzione del tempo.

In questo problema di filtraggio non abbiamo una combinazione lineare di variabili casuali, ma un integrale del prodotto dell'osservazione per una **funzione pesatura $h(t)$** , di cui dobbiamo determinare la forma:

$$\hat{s}(t) = \int_a^b h(\xi) x(\xi) d\xi.$$

La forma della funzione pesatura si ottiene imponendo la minimizzazione dell'errore quadratico medio attraverso il principio di ortogonalità:

$$E \left[\left(s(t) - \int_a^b h(\alpha) x(\alpha) d\alpha \right) x(\xi) \right] = 0 \quad \text{per } a < \xi < b.$$

$$E \left[\left(s(t) - \int_a^b h(\alpha) x(\alpha) d\alpha \right) x(\xi) \right] = 0 \quad \text{per } a < \xi < b.$$

Nell'ipotesi di stazionarietà, otteniamo:

$$R_{sx}(t - \xi) = \int_a^b R_{xx}(\alpha - \xi) h(\alpha) d\alpha.$$

filtro di Wiener (1942): è possibile ricavare la funzione pesatura $h(t)$ da questa *equazione integrale*.

Molti lavori seguirono al lavoro iniziale di Wiener e Kolmogoroff sui filtri. Il maggior contributo fu dato da Kalman (1960) che introdusse un filtro tempo discreto ricorsivola miglior stima del segnale $s(t)$ soddisfa un'equazione differenziale lineare "guidata" dal segnale $x(t)$. Il filtro di Kalman non è caratterizzato da un'espressione esplicita per la risposta impulsiva del filtro ma da un algoritmo adattativo.

significato "fisico" del filtro di Wiener:

(dominio della frequenza di Fourier)

...ancora applicando il principio di ortogonalità e ponendo $\tau = t - \xi$ ricavo l'equazione integrale :

$$R_{sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau - \alpha)h(\alpha)d\alpha$$

trasformando secondo Fourier ambo i membri ottengo: $S_{sx}(f) = S_{xx}(f) H(f)$

cioè la funzione di trasferimento cercata è $H(f) = \frac{S_{sx}(f)}{S_{xx}(f)}$

la sua antitrasformata ci fornisce $h(t)$.

$$H(f) = \frac{S_{sx}(f)}{S_{xx}(f)}$$

Nel caso in cui di nuovo segnale e rumore hanno la creanza di essere indipendenti ($S_{sn}(f) = 0$) allora:

$$S_{sx}(f) = S_{ss}(f) + S_{sn}(f) = S_{ss}(f)$$

$$S_{xx}(f) = S_{ss}(f) + S_{sn}(f) + S_{ns}(f) + S_{nn}(f) = S_{ss}(f) + S_{nn}(f)$$

arriviamo alla forma:
$$H(f) = \frac{S_{ss}(f)}{S_{ss}(f) + S_{nn}(f)}$$

L'errore di stima si calcola dall'espressione $Q = E[(s-\hat{s})\hat{s}]$:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{ss}(f)S_{nn}(f)}{S_{ss}(f) + S_{nn}(f)} df$$

$$H(f) = \frac{S_{ss}(f)}{S_{ss}(f) + S_{nn}(f)} \quad Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{ss}(f)S_{nn}(f)}{S_{ss}(f) + S_{nn}(f)} df$$

- l'errore di stima si annulla quando segnale e rumore occupano regioni spettrali differenti (non si sovrappongono): $S_{ss}(f) \cdot S_{nn}(f) = 0$;
in questo caso $H(f) = 1$ dove $S_{ss}(f) \neq 0$, $H(f) = 0$ dove $S_{ss}(f) = 0$.
- in assenza di rumore $n(t) = 0$
il filtro ottimo ha un modulo costante e un comportamento lineare della fase sullo spettro del segnale $x(t)$;
- in presenza di rumore la banda del filtro viene ridotta per ridurre il rumore all'uscita del filtro; si riduce così anche il segnale all'uscita del filtro; il valore ottimale della banda passante è quello al di sotto del quale il segnale all'uscita si riduce più rapidamente del rumore.

esempio

Consideriamo il caso dell'**estrazione di un segnale sinusoidale** immerso nel rumore....da queste considerazioni segue che il filtro di Wiener ottimale è un filtro con banda infinitamente stretta !!!

esempio

Consideriamo un **segnale a banda limitata (f_s)** in presenza di **rumore bianco**:

$$S_{ss}(f) = S_o / (1 + (f/f_s)^2) \quad N(f) = N_o$$

Ricaviamo $H(f)$...

$$H(f) = \frac{S_{ss}(f)}{S_{ss}(f) + N} = \frac{S_o}{S_o + N_o} \frac{1}{1 + \frac{N_o}{S_o + N_o} \left(\frac{f}{f_s} \right)^2}$$

- la frequenza di taglio superiore del filtro non è f_s ma è più alta; tanto più elevata quanto più grande è il rapporto S_o/N_o .

$$f_\beta = f_s (1 + S_o/N_o)^{1/2}$$

qual è la sua forma nel tempo ? $h(t)$?

Antitrasformando otteniamo la risposta impulsiva, che è **non causale**:

$$h(t) = A \exp(-2\pi\beta|t|)$$

dove β è la frequenza di taglio del filtro.

E' un'esponenziale bilatera...

N.B. il filtro di Wiener è *insensibile alla fase* del segnale di ingresso;

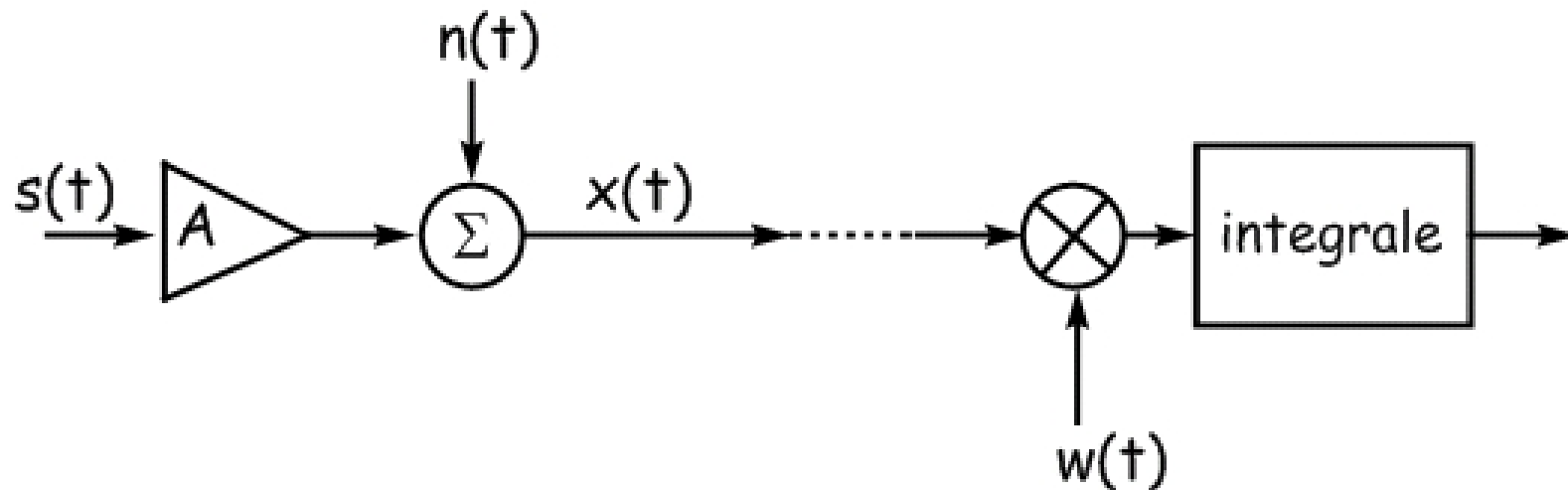
la funzione $h(t)$ è legata alle funzioni di autocorrelazione.

Un approccio che tiene conto invece di questo aspetto è il **filtro adattato**.

Filtro adattato

- forma dell'impulso del segnale $s(t)$ conosciuta;
- **obiettivo**: determinare l'**occorrenza** di un evento impulsivo la sua ampiezza A e l'istante di occorrenza t_o ;

$$x(t) = A s(t-t_o) + n(t)$$



calcoliamo nuovamente il prodotto di convoluzione fra il segnale $x(t)$ e una funzione di filtro $w(t)$:

$$m(t) = \int_{-\infty}^t w(t - \alpha)x(\alpha)d\alpha = \int_0^{+\infty} w(\alpha)x(t - \alpha)d\alpha$$

si dimostra che quando $w(t) = s(-t)$, ovvero la risposta impulsiva del filtro è uguale alla forma del segnale invertita nel tempo,

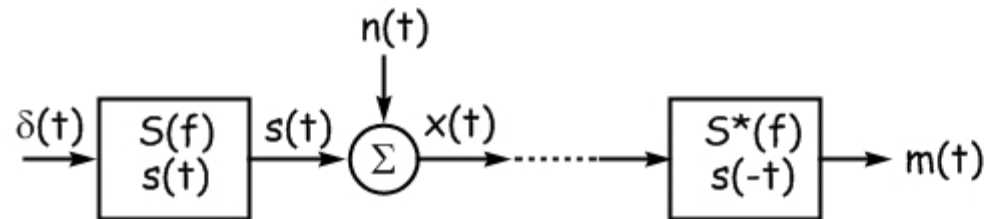
- fornisce il migliore rapporto segnale/rumore (nel caso di rumore bianco).
- la funzione di trasferimento del filtro $W(f)$ è ovviamente la trasformata di Fourier di $w(t) = s(-t)$, cioè: $W(f) = S^*(f)$

Significato fisico - modulo

L'espressione $W(f) = S^*(f)$ indica che il modulo della funzione di trasferimento del filtro è massima proprio per quelle frequenze a cui abbiamo il maggior contributo del segnale e allo stesso modo, dove il segnale ha un contenuto spettrale trascurabile la funzione di trasferimento del filtro è bassa.

Significato fisico - fase

La richiesta sul comportamento della fase è molto spesso trascurato e non compreso;



A partire dal segnale impulsivo a sinistra, tutte le componenti spettrali sono in fase all'istante $t = 0$; il filtro con f.d.t. $s(t)$ produce uno sfasamento fra le componenti spettrali in modo da costruire il segnale $s(t)$. Il ritardo di fase introdotto dal filtro adattato cancella esattamente quelle dovute al primo filtro, riportando in fase tutte le componenti spettrali.

Nota storica

La teoria del filtro adattato (così come quella del filtro di Wiener) è data sviluppata durante la 2^a guerra mondiale per la rivelazione di segnali radar, segnali di forma nota, di cui interessa misurare soprattutto il ritardo in ricezione per stabilire la distanza del bersaglio [3].

Qual è il rapporto Segnale/Rumore ?

- *segnale* il quadrato del valore massimo del segnale $m(t)$, all'uscita del filtro, cioè $m^2(t_0)$;
- *rumore* la varianza σ^2 del rumore all'uscita del filtro

$$\text{SNR} = m^2(t_0) / \sigma^2$$

Il segnale di uscita per l'ingresso $A s(t-t_0)$ sarà l'antitrasformata del prodotto: $A W(f) S(f) \exp(-j2\pi f t_0)$;

la varianza del rumore sarà data dall'integrale dello spettro del rumore di uscita: $S_n(f) |W(f)|^2$.

Il rapporto segnale/rumore sarà quindi:

$$SNR = A \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)W(f)e^{-j2\pi ft} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |W(f)|^2 S_n(f) df}$$

Se il rumore è bianco ($S_n(f) = \text{cost.}$), si dimostra appunto che SNR è

massimo per $W(f) = S^*(f)$, e $SNR = \frac{A}{S_n} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$

cos'altro ci dice tutto questo?

quando consideriamo un **segnale sinusoidale** al posto di un segnale impulsivo, queste considerazioni ci dicono che **la funzione peso ottimale è un segnale sinusoidale alla stessa frequenza;**

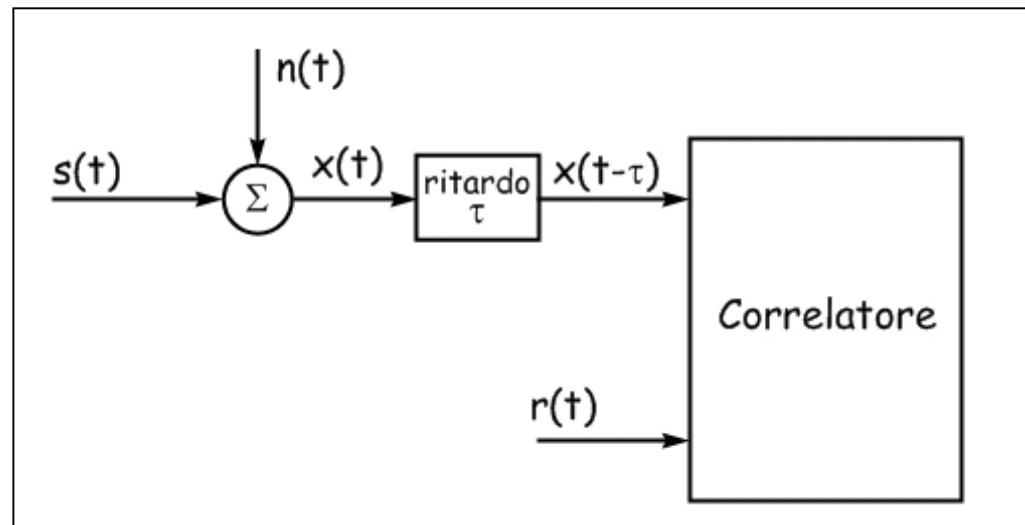
così come per un'onda quadra la funzione peso ottimale risulta essere un'onda quadra alla stessa frequenza...

...ma questo altro non è che il **lock-in** !

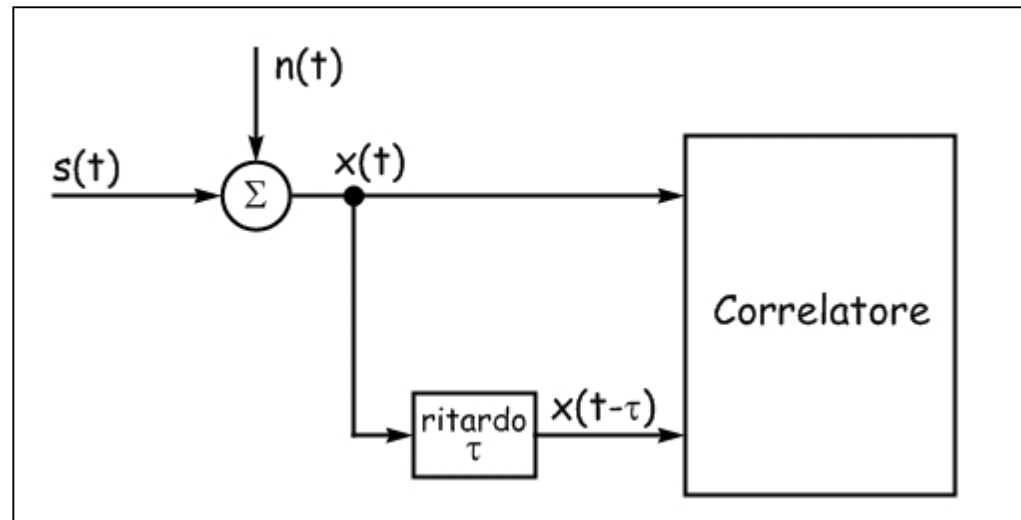
2. Tecniche di correlazione

- individuare la **presenza** di un segnale disponendo di un *segnale di riferimento* *correlazione incrociata con un segnale di riferimento*
- individuare la presenza di un segnale in assenza di un segnale di riferimento, sfruttando la correlazione fra osservazioni diverse dello stesso segnale:
 - a) a tempi diversi; *autocorrelazione*
 - b) allo stesso tempo, utilizzando due o più *misure* dello stesso segnale. *Brown-Twiss*

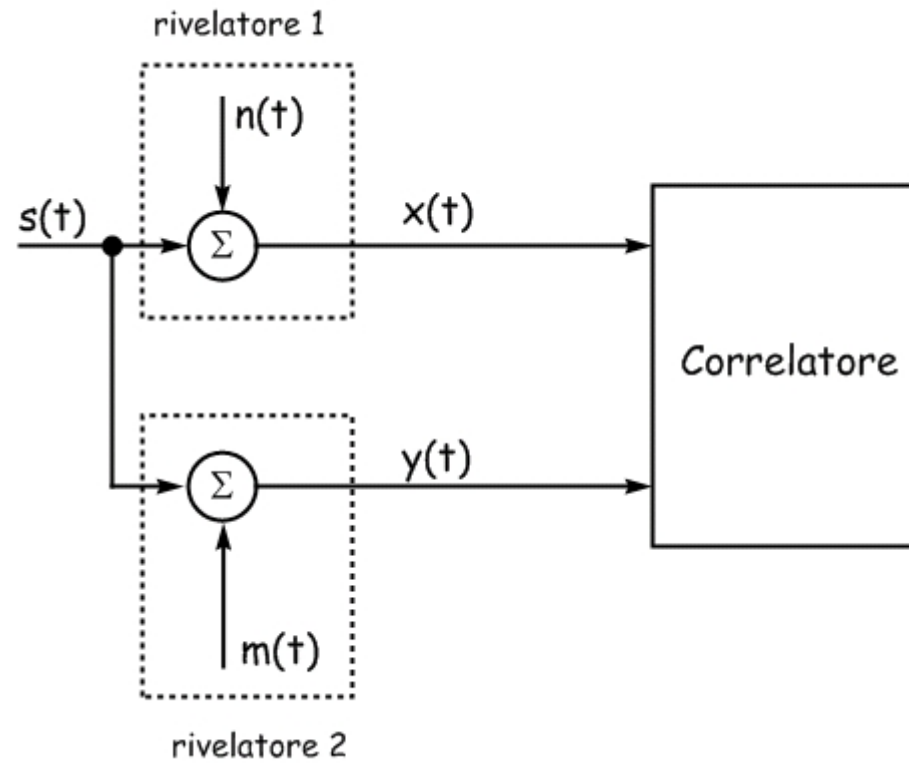
- segnale $x(t)$ e un riferimento ideale: $R_{xr}(\tau)$



- quando non abbiamo a disposizione un segnale di riferimento: $R_{xx}(\tau)$



- **tecnica Twiss-Brown:**

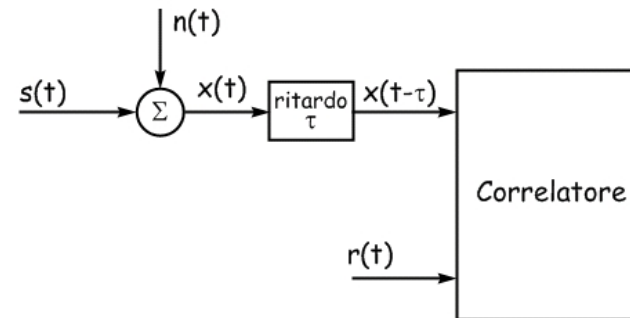


Estrazione di un segnale sinusoidale dal rumore,
con un segnale di riferimento.

$$x(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi) + n(t)$$

di cui è nota la frequenza f , ma non la fase né l'ampiezza.
Vogliamo stimarne l'ampiezza.

Il segnale di riferimento: $r(t) = \sin(2\pi f t)$
alla stessa frequenza.



Eseguo la correlazione incrociata fra i due segnali:

$$R_{xr}(\tau) = E[x(t + \tau)r(t)] = \frac{1}{2} A \cos(2\pi f \tau + \varphi)$$

$$R_{xr}(\tau) = E[x(t + \tau)r(t)] = \frac{1}{2} A \cos(2\pi f\tau + \varphi)$$

posso quindi determinare sia l'ampiezza A che la fase φ .

In pratica l'osservazione del segnale avverrà su un tempo finito T e quindi anche la stima di $R_{xr}(\tau)$ sarà incerta...

...l'incertezza nasce dalle fluttuazioni del termine che nasce dalla media temporale (su un tempo finito T) del prodotto $n(t) \cdot r(t)$.

Incerteza nella stima delle funzioni di correlazione

...in generale...

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t + \tau) y(t) dt$$

per $0 \leq \tau < T$. Dove si suppone di avere a disposizione un'osservazione sperimentale su un intervallo di tempo $T + \tau$, per il valore massimo di τ a cui siamo interessati.

L'incerteza nella stima sar :

$$\begin{aligned} \sigma^2[R_{xy}(\tau)] &= E[R_{xy}^2(\tau)] - R_{xy}^2(\tau) = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [x(v + \tau) y(v) x(u + \tau) y(u) - R_{xy}^2(\tau)] dudv \end{aligned}$$

dove entrano in gioco i momenti statistici del quarto ordine !

...se i processi $x(t)$ e $y(t)$ sono gaussiani (statistica del secondo ordine) allora questa espressione si riduce alla forma:

$$\sigma^2[\hat{R}_{xy}(\tau)] = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\xi|}{T}\right) (R_{xx}(\xi)R_{yy}(\xi) + R_{xy}(\xi - \tau)R_{yy}(\xi + \tau)) d\xi$$

- si annulla per $T \rightarrow \infty$ (stima consistente);
- per T sufficientemente grande l'espressione si riduce a

$$\sigma^2[\hat{R}_{xy}(\tau)] \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} (R_{xx}(\xi)R_{yy}(\xi) + R_{xy}(\xi - \tau)R_{yy}(\xi + \tau)) d\xi$$

per $\tau = 0$ l'integrando si riduce a $2 R_{xx}(\xi)$;

per τ sufficientemente grande l'integrando si riduce a $R_{xx}(\xi)$

(si sfrutta la relazione $R_{xx}^2(\xi) \gg R_{xx}(\xi + \tau)R_{xx}(\xi - \tau)$)

Nel caso in cui i due processi $x(t)$ e $y(t)$ sono a **media nulla** e a **banda limitata**, B si ottiene:

$$\sigma^2[\hat{R}_{xy}(\tau)] \approx \frac{1}{BT} [R_{xx}(0)R_{yy}(0) + R_{xy}^2(\tau)]$$

Tornando al caso particolare dell'estrazione di una sinusoide di frequenza f nota **con un riferimento ideale** $y(t) = r(t)$, $m(t) = 0$ (senza rumore)

$$R_{xx}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau) = \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f \tau) + R_{nn}(\tau)$$

$$R_{yy}(\tau) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f \tau)$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} A \cos(2\pi f \tau + \varphi)$$

Per misure a bassi valori del rapporto segnale-rumore $A^2/2\sigma_n^2 \ll 1$

otteniamo: $\sigma^2 \approx \sigma_n^2 \frac{1}{4BT}$

Nel caso in cui non è disponibile il segnale di riferimento ?

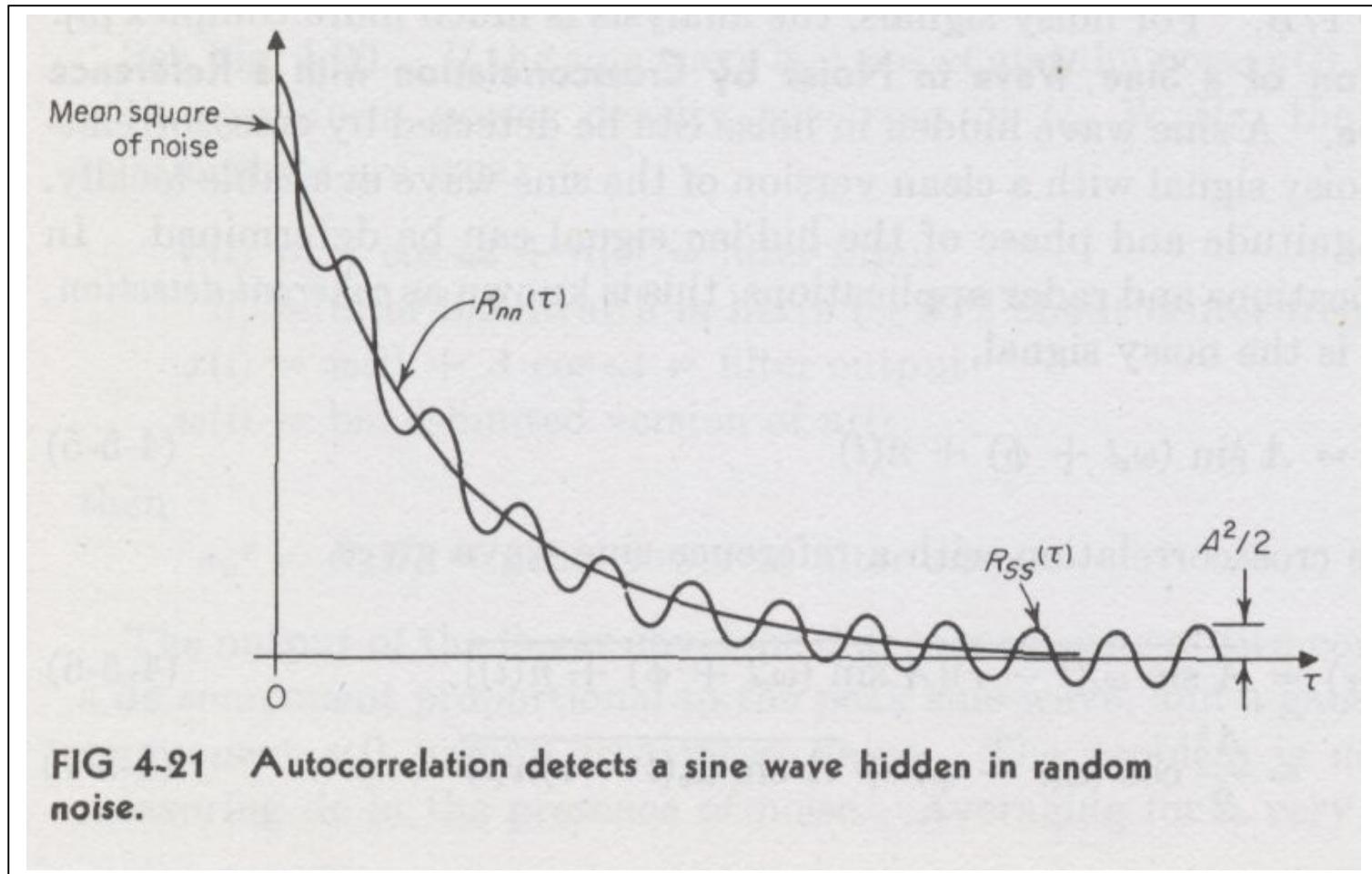
Consideriamo il caso in cui non si conosca *né la frequenza né l'ampiezza* del segnale sinusoidale immerso nel rumore e si voglia stimare questi parametri.

Eseguiamo allora l'autocorrelazione del segnale misurato:

$$x(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi) + n(t)$$

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t + \tau)x(t)] = \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f \tau) + R_{nn}(\tau)$$

da cui determiniamo i parametri incogniti (*frequenza e ampiezza*)
ma *non la fase*.



per ritardi τ sufficientemente grandi possiamo agevolmente stimare i parametri della sinusoide.

Anche in questo caso devo ricordarmi che sto effettuando un'osservazione su un tempo finito e quindi avrò delle fluttuazioni sulla stima.

Tecnica Twiss-Brown

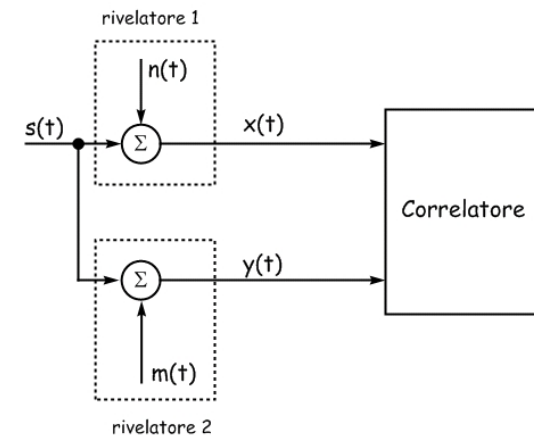
(R.Hanbury Brown, The Intensity Interferometer, Taylor & Francis, 1974)

Quando ho due sensori che misurano lo stesso segnale, con rumori fra loro indipendenti ?

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad \text{con } R_{xx}(0) = S + N$$

$$y(t) = s(t) + m(t) \quad \text{con } R_{yy}(0) = S + M$$

$R_{sn}(\tau) = 0$; $R_{sm}(\tau) = 0$; $R_{nm}(\tau) = 0$.
(segnale e rumore dei due rivelatori scorrelati)



La correlazione incrociata di questi processi fornisce la varianza del segnale $R_{xy}(0) = S$.

L'errore di stima, dove effettivamente non ci sia alcuna correlazione fra i rumori associati alle due osservazioni attraverso i due sensori:
(dal caso di un processo di rumore a banda limitata)

$$\sigma^2[\hat{R}_{xy}(\tau)] \approx \frac{1}{BT} [R_{xx}(0)R_{yy}(0) + R_{xy}^2(\tau)]$$

Nel caso di nostro interesse diventa:

$$\sigma^2[\hat{R}_{ss}(0)] \approx \frac{1}{BT} [(S + N)(S + M) + S^2]$$

in condizioni di basso rapporto segnale/rumore, dove $N = M$ (sensori fra loro uguali), allora

$$\sigma^2[\hat{R}_{ss}(0)] \approx \frac{N^2}{BT}$$

La varianza si riduce con la radice quadrata del tempo di integrazione T .

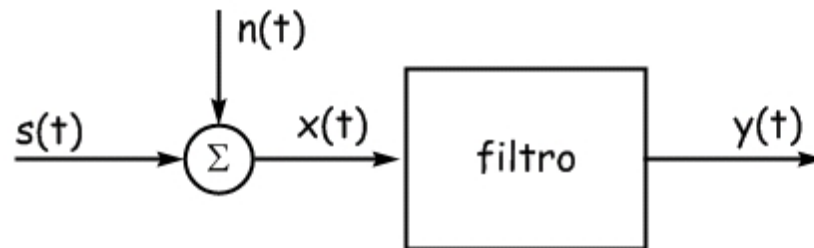
Questa tecnica è impiegata in varie discipline (radioastronomia, termometria di rumore,..., misure di rumore di fase negli oscillatori!) spesso riscoprendola...

Il suo grande pregio sta nella capacità di ridurre l'incertezza di misura del sistema a correlazione al di sotto del rumore proprio del singolo canale del sistema.

Rivelazione del segnale - riassunto

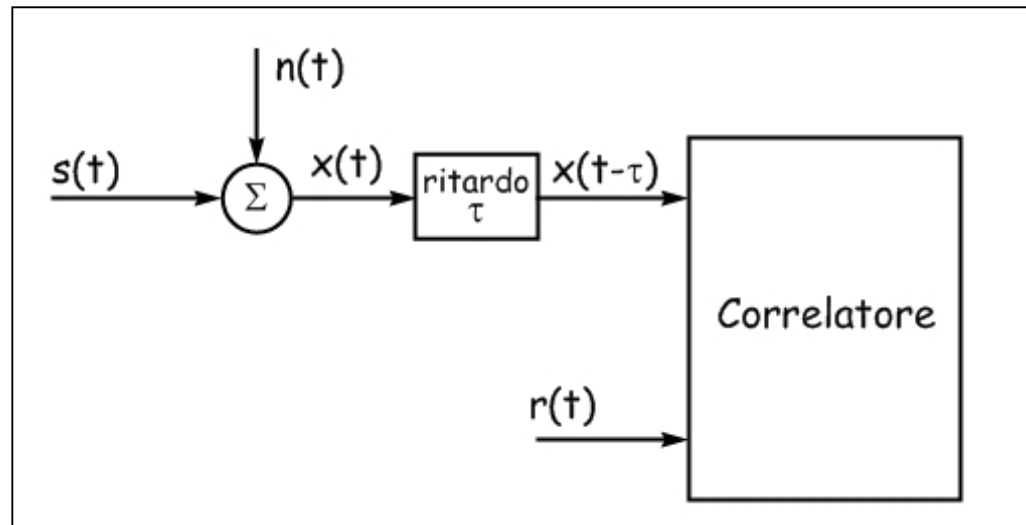
ipotesi: rumore additivo $x(t) = s(t) + n(t)$

- **filtraggio:** media mobile e le sue patologie; filtro primo ordine,...
compito del filtro è quello di eliminare le componenti spettrali del segnale $x(t)$ che non contengono alcuna informazione sul segnale $s(t)$ che intendiamo stimare. Attenzione nella scelta del filtro al suo comportamento imprevisto verso rumore o disturbi ad esempio impulsivi.



2.correlazione:

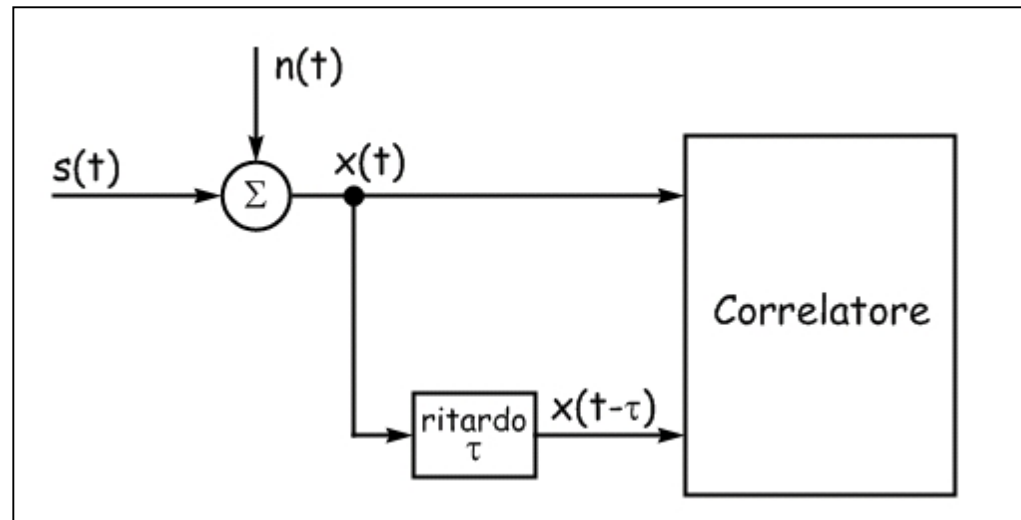
- segnale $x(t)$ e un riferimento ideale: $R_{xr}(\tau)$



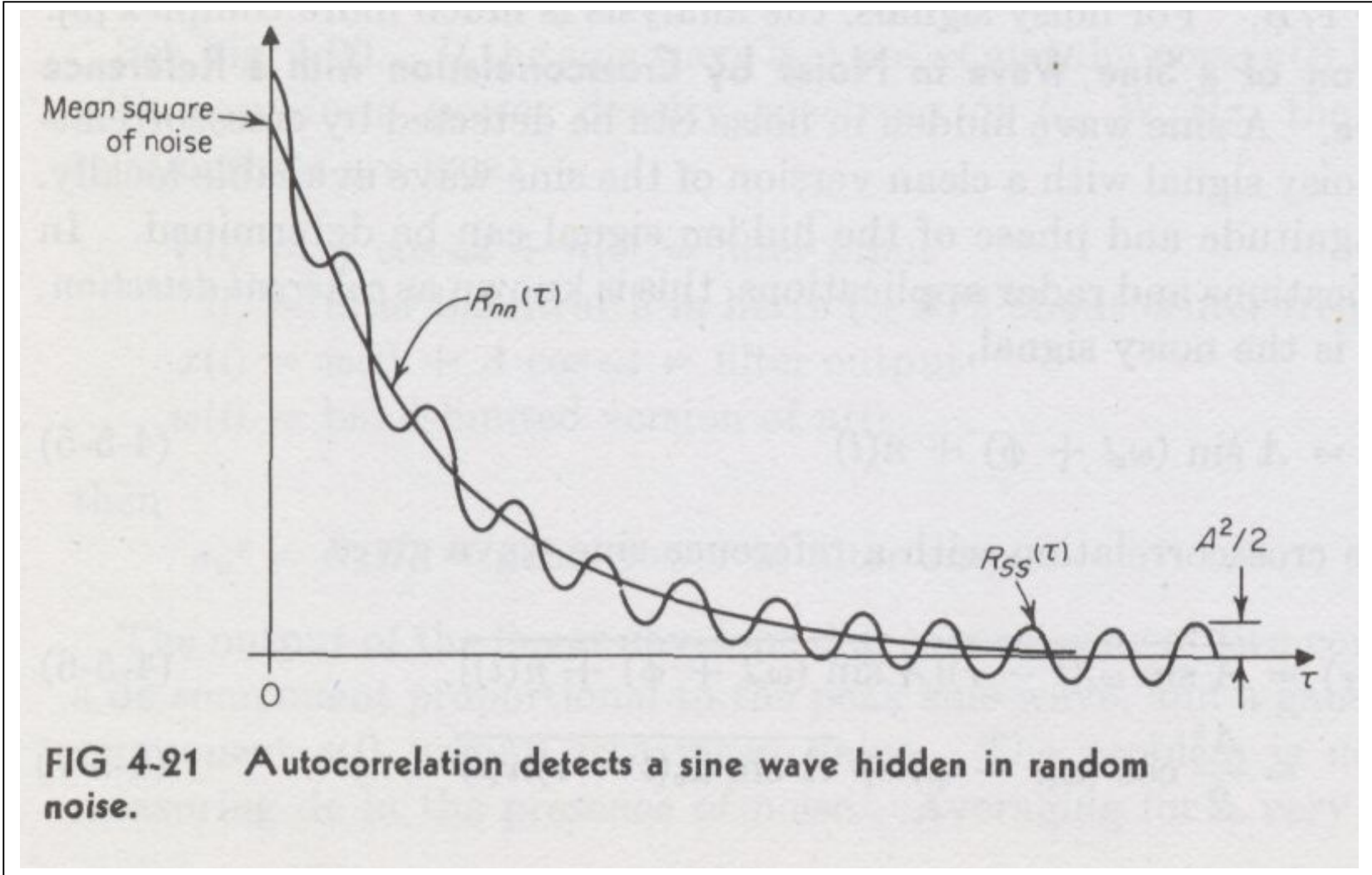
$$\sigma^2 \approx \sigma_n^2 \frac{1}{4BT}$$

dove T = intervallo di tempo dell'osservazione (integrazione) di $x(t)$;

- quando non abbiamo a disposizione un segnale di riferimento: $R_{xx}(\tau)$



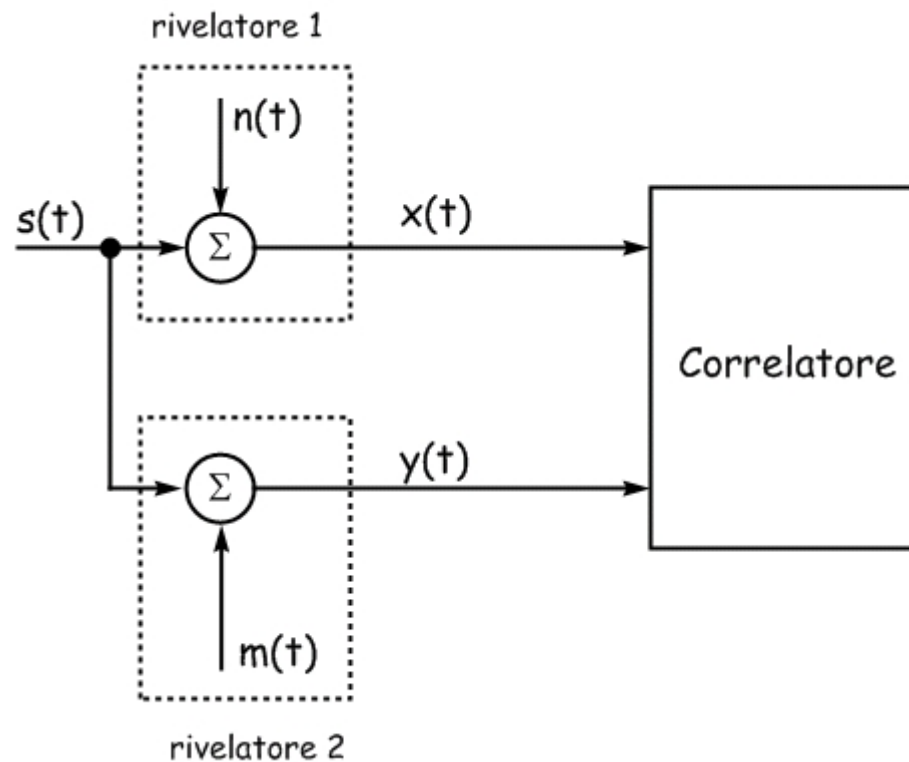
$$R_{xx}(\tau) = E[x(t + \tau)x(t)] = \frac{1}{2} A \cos(2\pi f t) + R_{nn}(\tau)$$



- tecnica Twiss-Brown:

$$\sigma^2[\hat{R}_{ss}(0)] \approx \frac{N^2}{BT}$$

Il suo grande pregio sta nella capacità di ridurre l'incertezza di misura del sistema a correlazione al di sotto del rumore proprio del singolo canale del sistema.



BoxCar sampling gate

...il caso del filtro adattato è la soluzione ottimale dal punto di vista del rapporto SNR; tuttavia in molte situazioni il miglioramento rispetto al caso di un'integrazione sulla durata dell'impulso può risultare modesto rispetto alla complicazione e alla specificità dell'implementazione di un filtro adattato.

Una soluzione alternativa molto interessante e relativamente semplice da implementare è quella di integrare su impulsi successivi

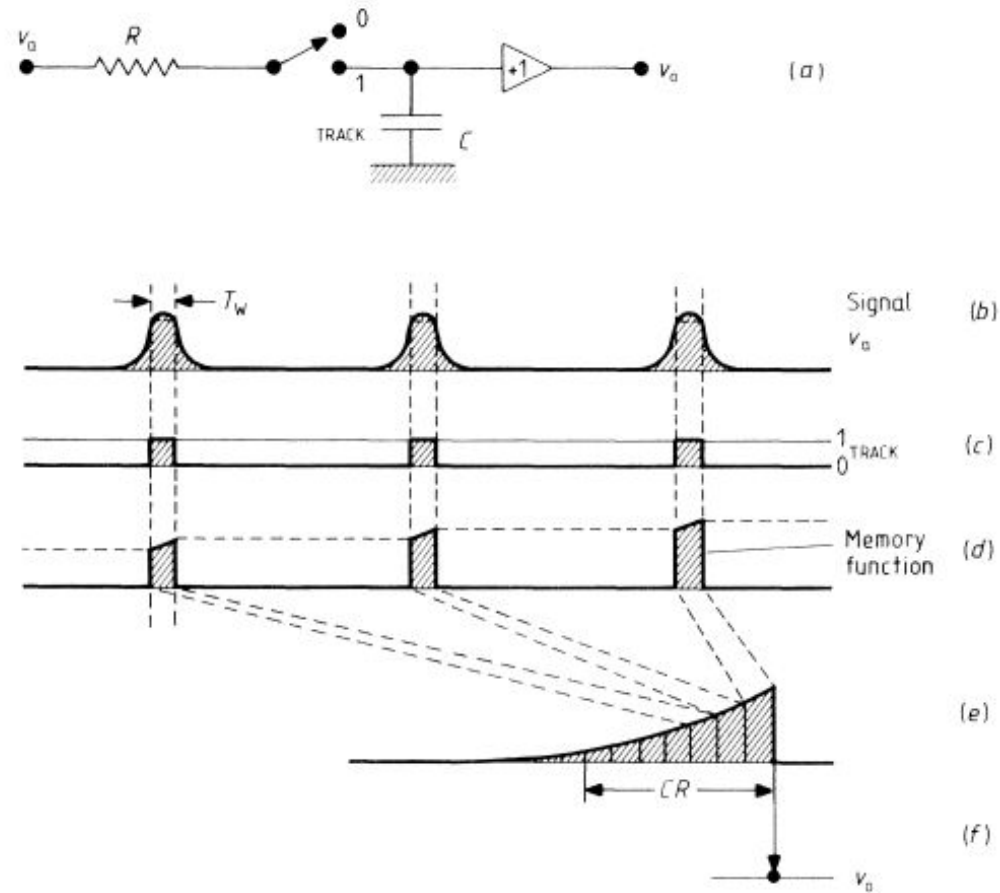
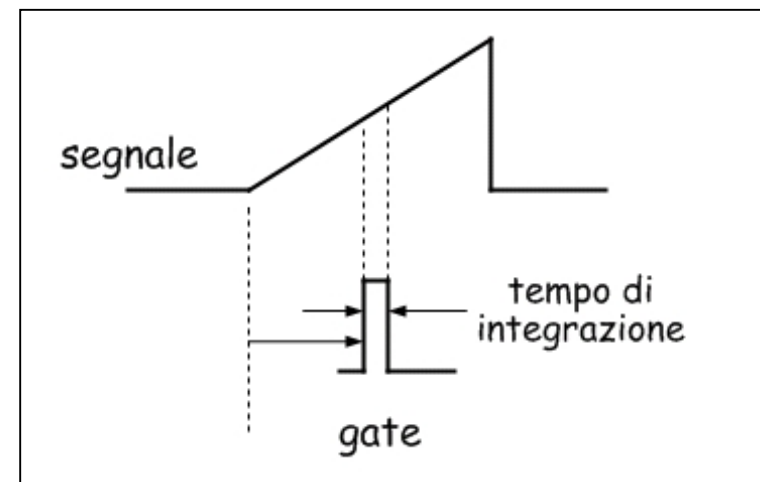
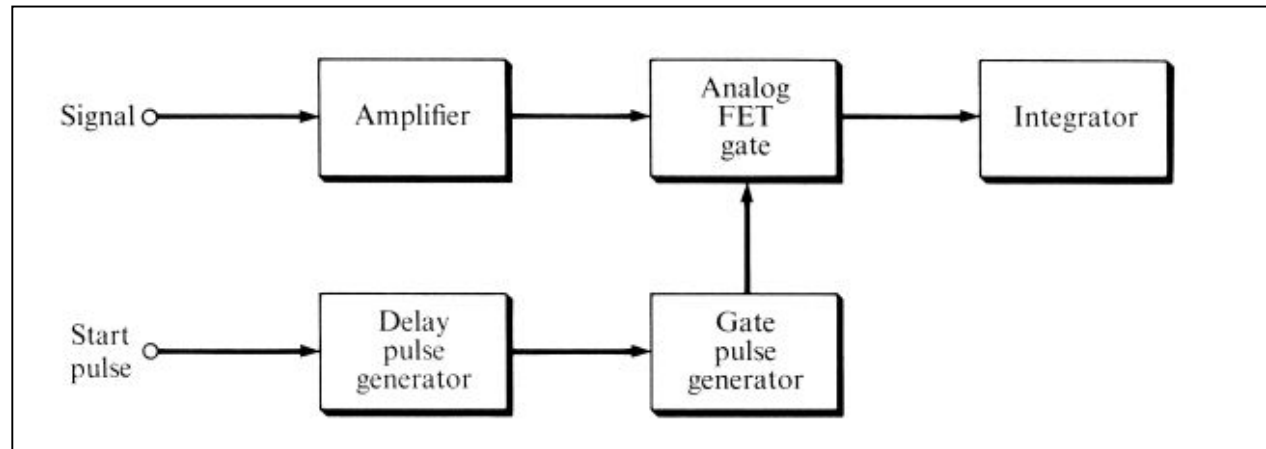


Figure 9.14 Boxcar sampling gate. (a) Circuit diagram, (b) signal form, (c) track switch operation, (d) memory function, (e) the memory function that would obtain if the switch were kept closed all the time.

l'interruttore del circuito è chiuso in corrispondenza di ogni impulso integrando il segnale all'ingresso; quando l'interruttore invece rimane aperto la tensione ai capi del condensatore non cambia. Questa semplice soluzione consente di accumulare il segnale in corrispondenza del picco migliorando il rapporto segnale/rumore.

questa tecnica funziona anche nel caso di una forma del segnale più generale, di cui si intende ricostruire la forma; in questo caso occorre integrare su un piccolo intervallo di tempo rispetto alla durata del segnale e accumulare su più eventi successivi; cambiare la regione di integrazione e di nuovo accumulare...





La ricostruzione della forma del segnale richiede un tempo proporzionale al numero di medie che si effettuano su ogni intervallo di tempo su cui è suddiviso il segnale e dal loro numero;

N.B. mi serve anche un segnale di riferimento

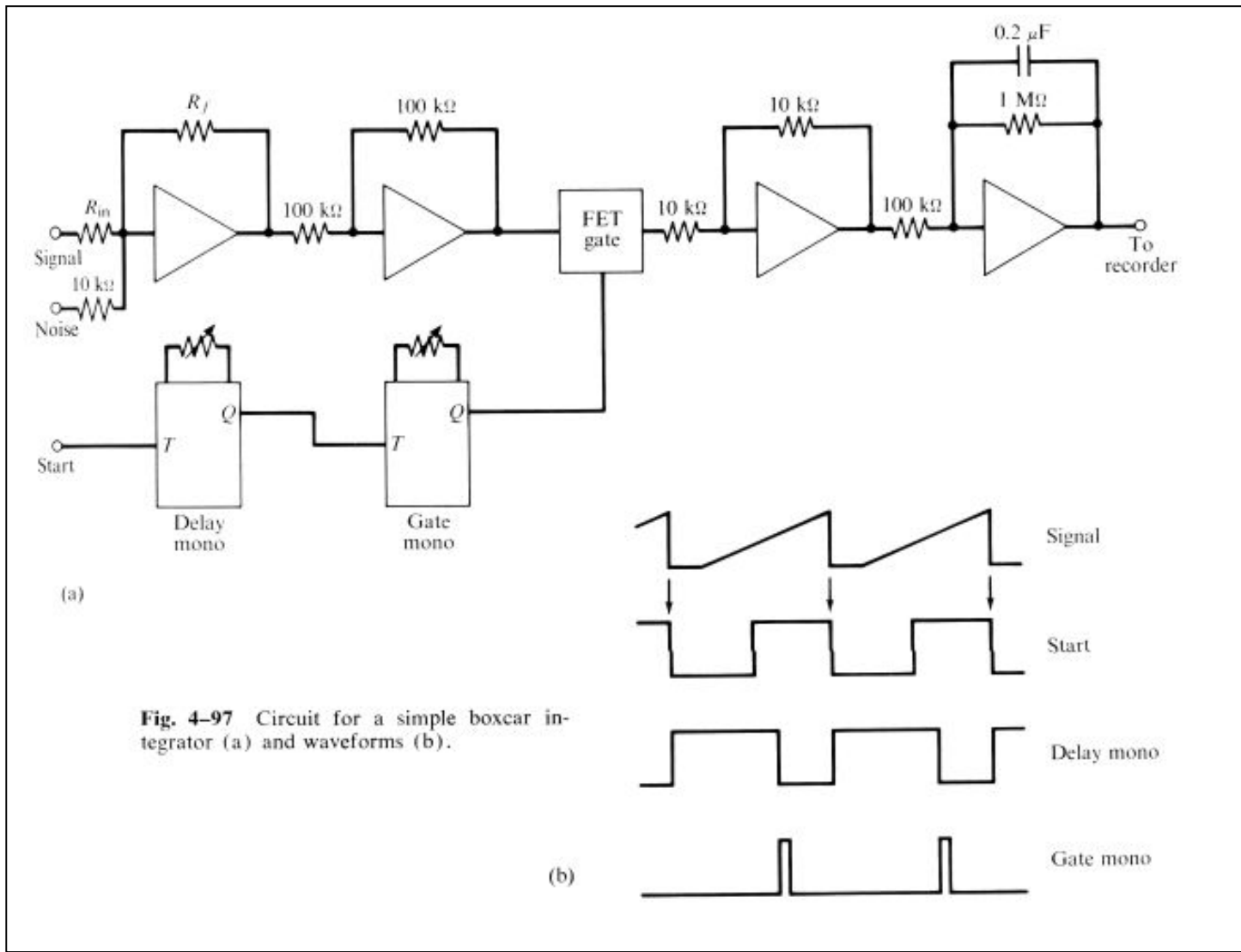
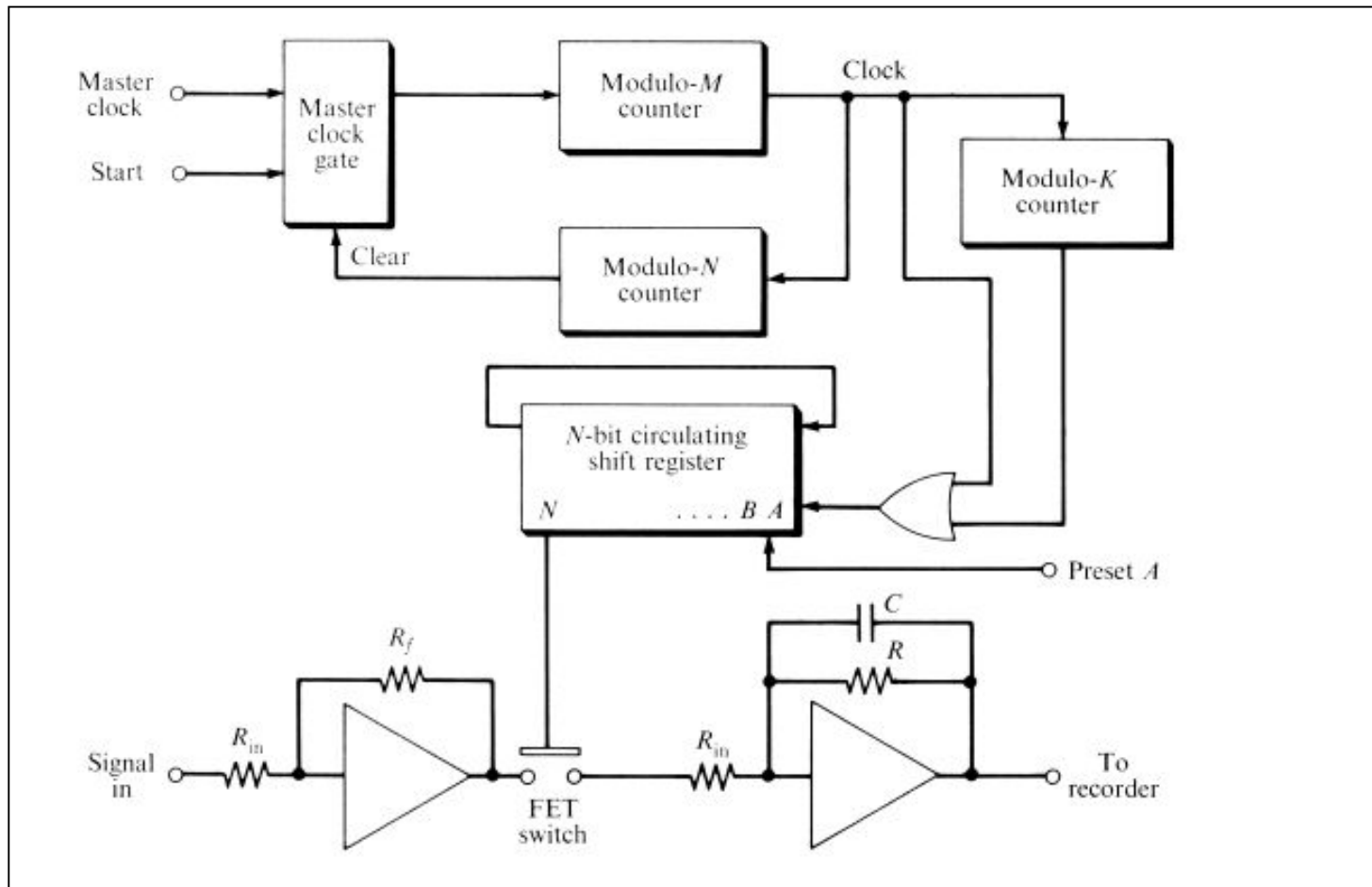


Fig. 4-97 Circuit for a simple boxcar integrator (a) and waveforms (b).

...è ovviamente possibile realizzare una scansione automatica del ritardo rispetto all'inizio del segnale



Lock-in

Per aggirare i problemi causati da rumore $1/f$, derive e offset una tecnica efficace e di largo impiego è quella della rivelazione sincrona; il segnale viene opportunamente modulato in modo tale da spostare spettralmente l'informazione del nostro esperimento dalla d.c., bassa frequenza, ad una frequenza f lontana dai termini di deriva, rumore $1/f$.

- sorgente segnale modulata a frequenza f ;
- amplificatore a.c.;
- rivelazione sincrona.

Lock-in

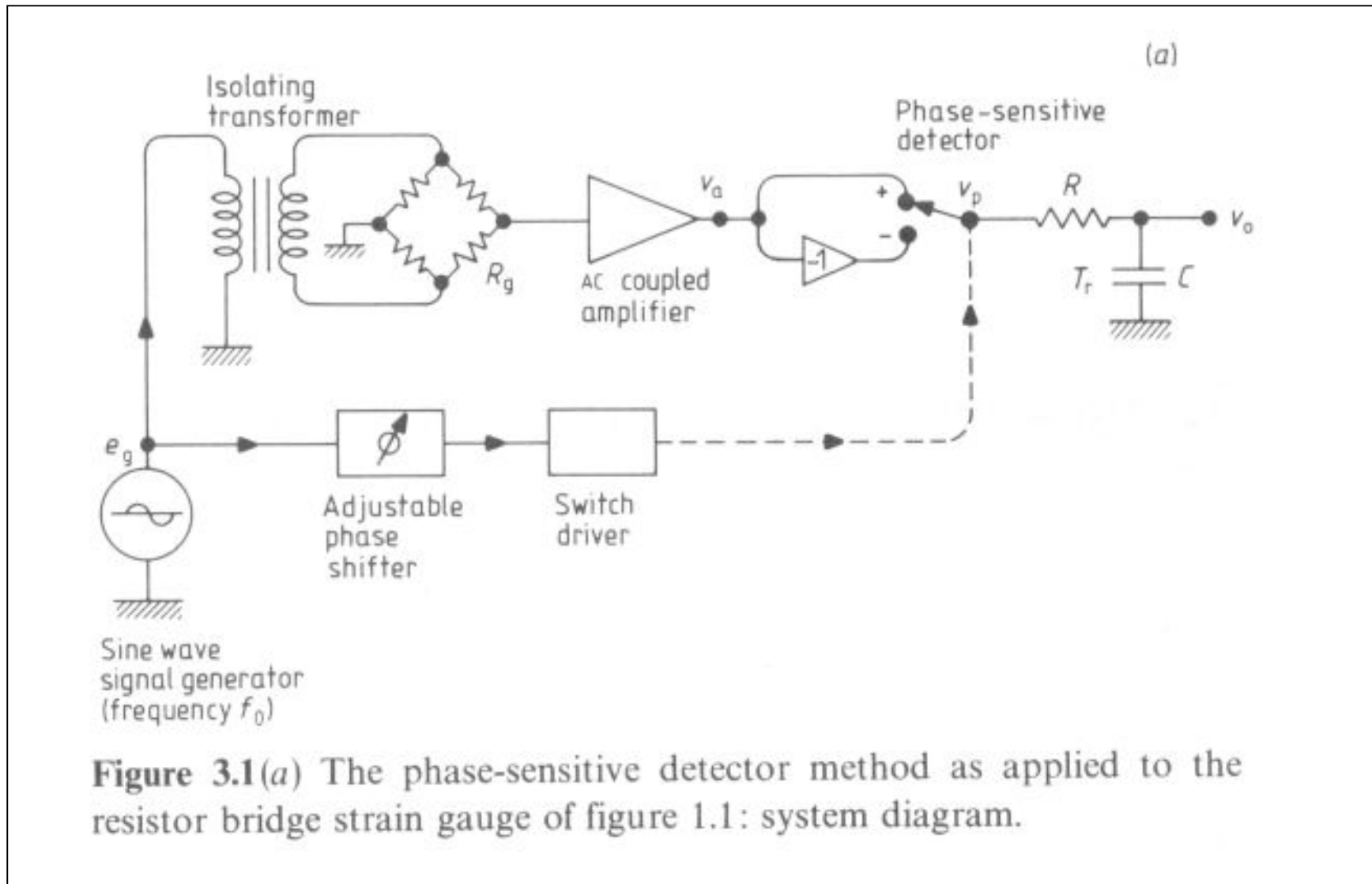
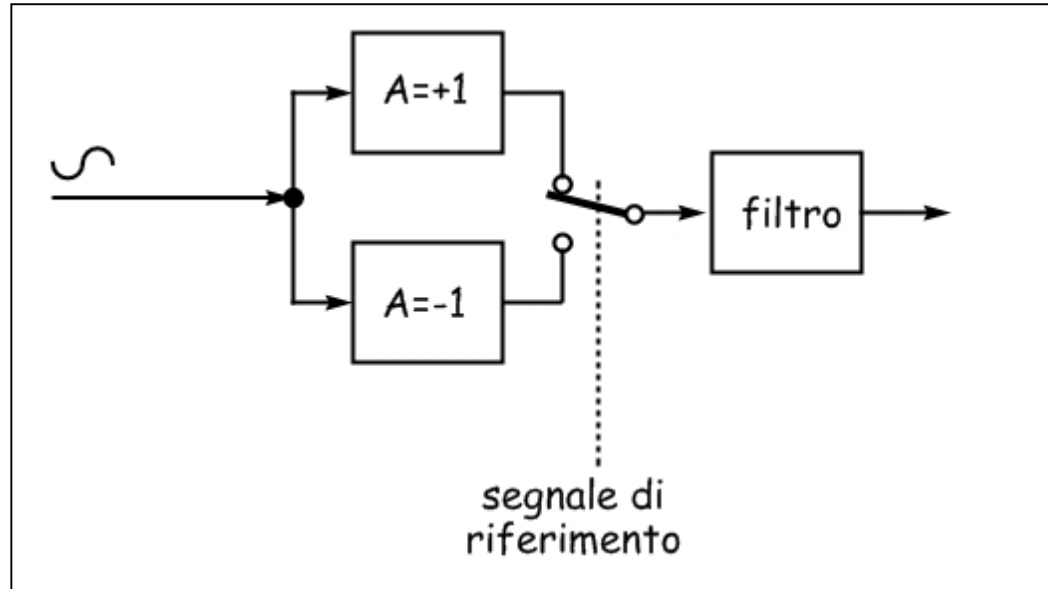


Figure 3.1(a) The phase-sensitive detector method as applied to the resistor bridge strain gauge of figure 1.1: system diagram.



Come funziona?

consideriamo di voler misurare una sinusoide di frequenza e fase nota in presenza di rumore.

Il segnale di controllo è un'onda quadra sincrona con la sinusoide applicata all'ingresso. L'effetto della **commutazione sincrona** è quello di **rettificare il segnale sinusoidale** collegandosi all'uscita dell'amplificatore che in quell'istante fornisce un'uscita positiva. L'uscita del filtro è un segnale costante proporzionale all'ampiezza della sinusoide.

Il processo di rettificazione risulta influente sul rumore; all'ingresso del filtro avremo ancora del rumore con le stesse proprietà statistiche. Si può migliorare a piacere il rapporto segnale-rumore aumentando il tempo di integrazione del filtro, potendo così misurare l'ampiezza dell'onda sinusoidale di debolissima intensità immersa nel rumore.

L'eventuale **amplificazione** del segnale avviene **alla frequenza di modulazione** lontano dalla continua (e dal rumore $1/f$); gli effetti di eventuali offset di questo componente sono influenti.

Confronto fra misura dc e con lock-in in presenza di rumore bianco;

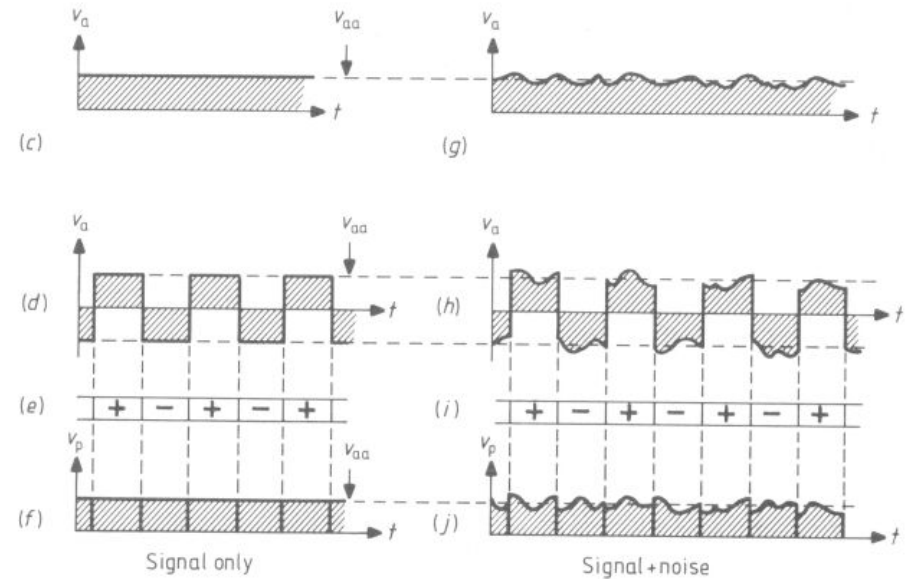
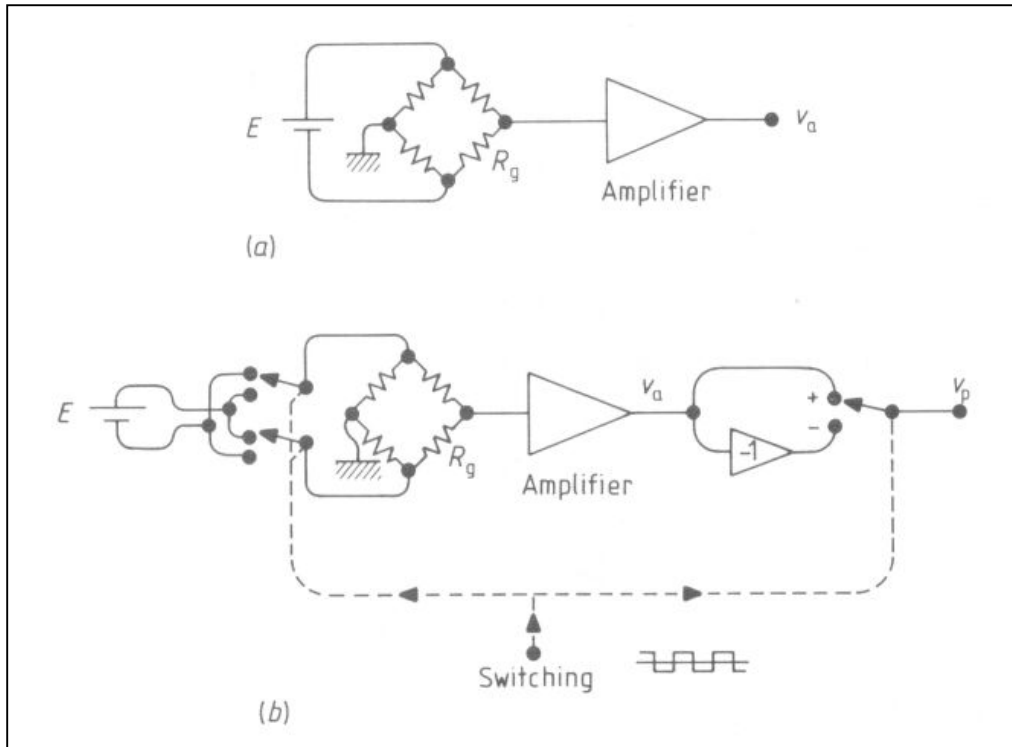


Figure 3.8 Diagram showing how adapting the resistor bridge strain gauge to the PSD method leaves the system response to both signal and white noise unaltered. (a) Simple resistor bridge strain gauge, (b) adaptation to PSD. (c) and (g), amplifier output for (a); (d) and (h), amplifier output for (b); (e), (i) PSD switch states, (f), (j) PSD output.

Nota storica - radiometro di Dicke

L'introduzione di questa tecnica di misura è comunemente attribuita a **Dicke**. Il suo problema era quello di effettuare misure di debolissime potenze a microonde (radiazione termica). Per aggirare il problema della stabilità del sistema di amplificazione del segnale misurava la differenza del segnale prodotto dalla sorgente in studio e una sorgente di riferimento (terminazione a temperatura nota).

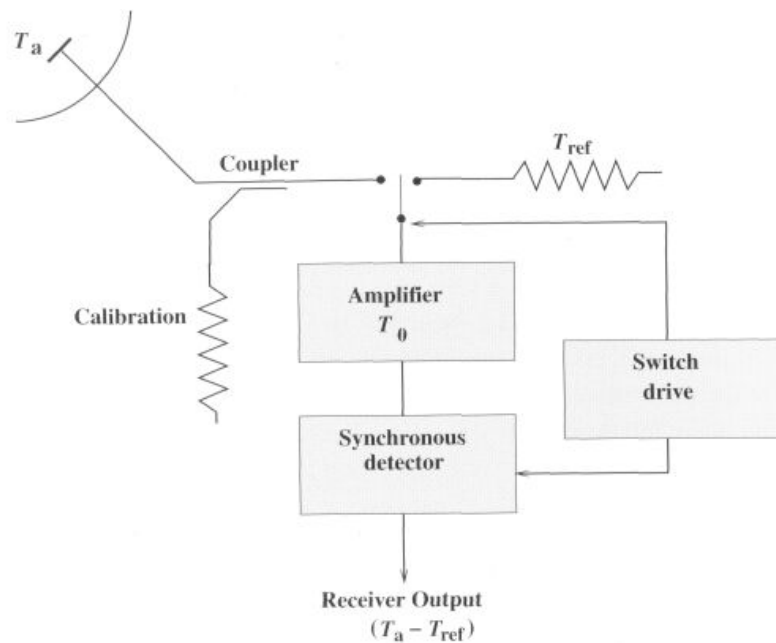
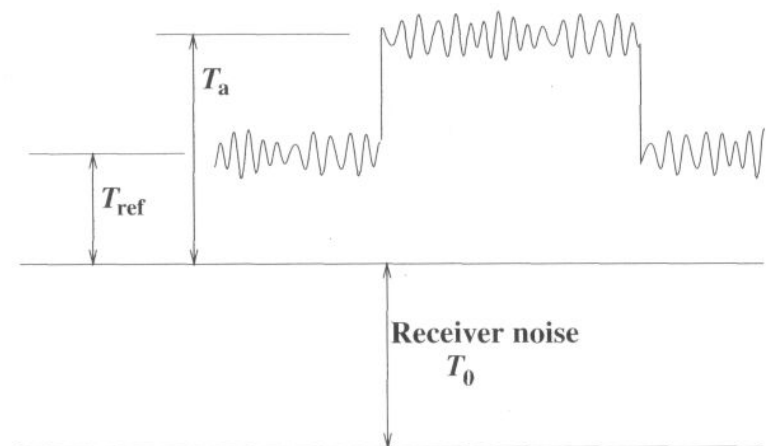


Fig. 3.6. The Dicke switched radiometer, showing the switched signal as a function of time.



The Measurement of Thermal Radiation at Microwave Frequencies

R. H. DICKE*

*Radiation Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts***

(Received April 15, 1946)

The connection between Johnson noise and blackbody radiation is discussed, using a simple thermodynamic model. A microwave radiometer is described together with its theory of operation. The experimentally measured root mean square fluctuation of the output meter of a microwave radiometer (0.4°C) compares favorably with a theoretical value of 0.46°C . With an r-f band width of 16 mc/sec., the 0.4°C corresponds to a minimum detectable power of 10^{-16} watt. The method of calibrating using a variable temperature resistive load is described.

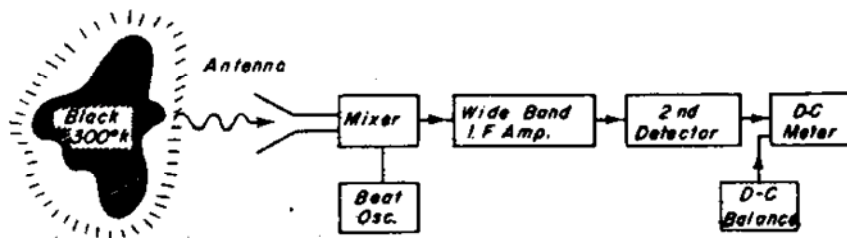


FIG. 2. Wide band receiver used as radiometer.

of the same order of magnitude. There is, however, an important source of fluctuation which was intentionally omitted. If the gain of the receiver varies in a random way, the output meter will fluctuate, and this type of fluctuation is likely to be larger than the other. The more obvious sources of these fluctuations are, of course, line voltage variations, and ambient temperature drifts. However, even if power supplies are carefully regulated and temperatures stabilized there are fluctuations having their origins in the tubes themselves. Also fluctuations

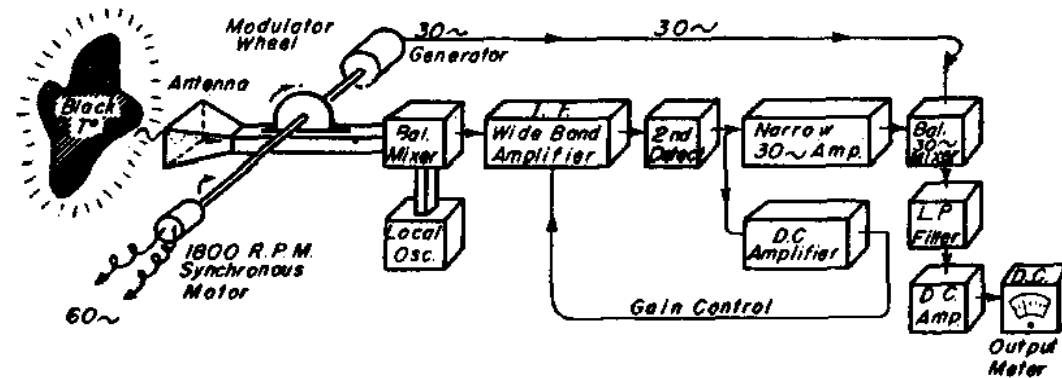


FIG. 3. Microwave radiometer.

THE MICROWAVE RADIOMETER

In order to eliminate "gain variation noise," the radiometer shown in block diagram in Fig. 3 was designed.

The device shown in Fig. 3 consists of an antenna (shown as a horn) connected to a crystal balanced mixer (see Fig. 5 for details of mixer) by a rectangular wave guide. The connecting wave guide contains a slotted section in which an absorbing wheel is caused to rotate. The absorbing wheel is driven by a motor at 30 cycles/sec. and is so shaped that it produces a nearly square modulation with about equal times in and out of the guide. It is assumed that both the wheel and antenna are non-reflecting. Under

The 30-cycle component of this modulation is amplified by the 30-cycle amplifier and then mixed with 30 cycles from the coherent beat frequency generator to produce d.c. The output from the 30-cycle balanced mixer is fed through a very narrow band low pass filter into a d.c. amplifier which drives a d.c. meter. This d.c. meter measures the difference between the antenna temperature and the modulating wheel's temperature. The meter needle swings either to the left or the right depending upon the sign of this difference.

The device of Fig. 3 has the advantage over that of Fig. 2 of eliminating the “gain variation noise” from the output meter. The reason for the elimination of this type of fluctuation can be understood, at least qualitatively from the following arguments: in the radiometer of Fig. 3 the radiation from the antenna is compared with that generated by a standard reference resistor (the modulator wheel). This comparison is made 30 times a second and in the short time interval of $1/30$ sec. the amplifier gain does not change greatly. The output meter with its long time constant is effectively measuring the average of a great number of individual measurements, each requiring $1/30$ of a second to perform.

In Fig. 4 there is plotted the average power against frequency for the output of the second detector of Fig. 3. It is to be noted that the signal, appearing as it does at 30 cycles/sec., avoids the “gain variation noise.”

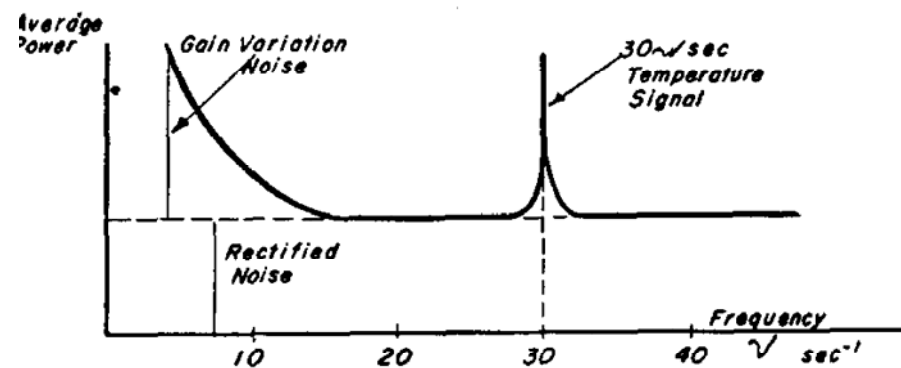
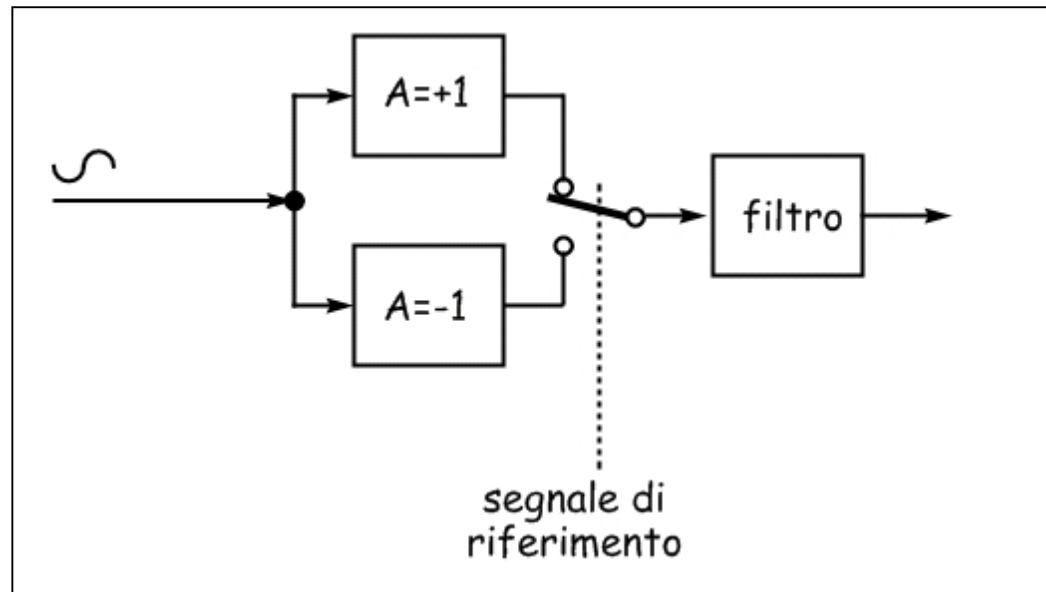


FIG. 4. Second detector output.

altre descrizioni equivalenti del funzionamento del lock-in:

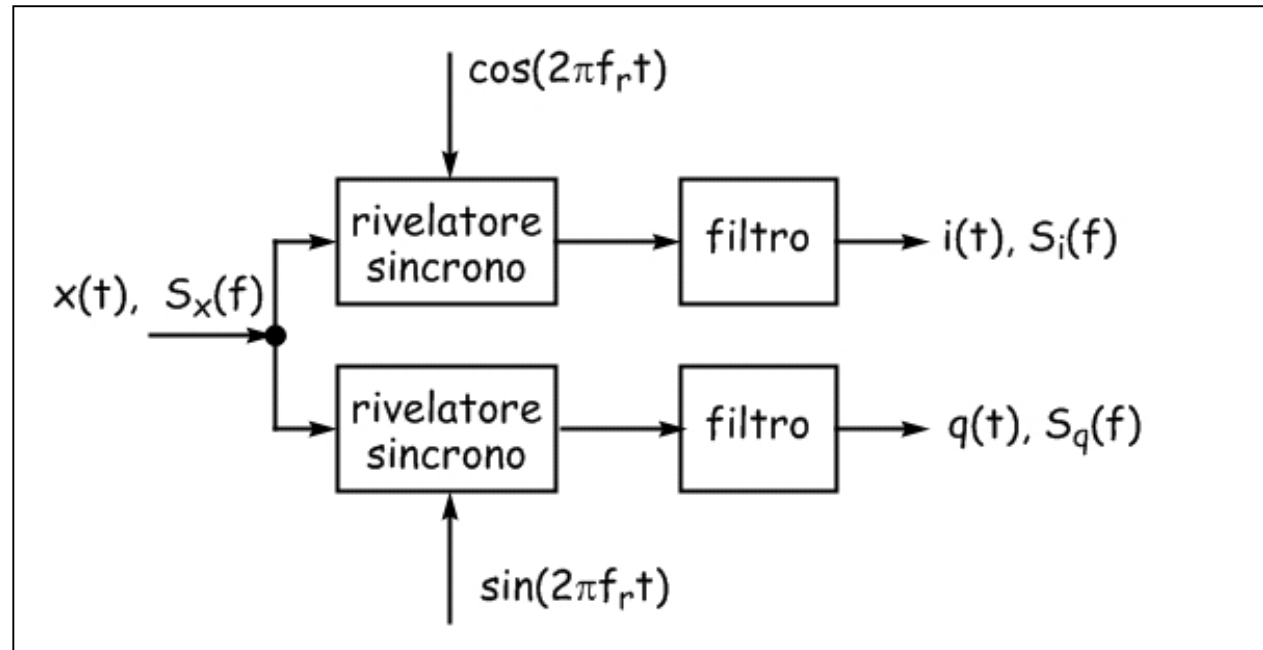
- strumento che esegue l'analisi spettrale del segnale al suo ingresso alla frequenza del segnale di riferimento; la continua commutazione fra le due posizioni del deviatore è equivalente a moltiplicare il segnale di ingresso per un'onda quadra (fondamentale + armoniche dispari);
- correlazione incrociata fra il segnale e un riferimento periodico;
- traslazione in frequenza dello spettro del segnale di ingresso; le componenti spettrali del segnale attorno alla frequenza del segnale di riferimento vengono traslate a bassa frequenza;
- *demodulatore* di un segnale modulato in ampiezza.



Tornando al nostro schema di principio.

Quando la sinusoide di ingresso è in fase con il segnale di riferimento, l'uscita dal filtro è massima. In generale l'uscita sarà proporzionale al coseno della differenza di fase fra riferimento e segnale.

Di solito sono disponibili due canali d'uscita; uno per la componente in fase l'altro per la componente in quadratura (90°).



filtro: consideriamo un filtro del primo ordine
$$H(f) = \frac{1}{1 + j(f / f_{-3dB})}$$

Assumiamo che il rivelatore sincrono esegua il prodotto fra il segnale $x(t)$ e il riferimento $r(t)$; prendiamo in considerazione questa volta un riferimento sinusoidale a frequenza fissa f_r : $r(t) = \cos(2\pi f_r t)$.

L'uscita del rivelatore sincrono è: $u(t) = x(t) \cdot r(t)$.

L'operazione prodotto è evidentemente un'operazione non-lineare fra i due segnali...

Consideriamo il comportamento di questo componente rispetto a due diversi segnali di ingresso:

- **segnali periodici**: $s(t) = A(t) \cos(2\pi f_s t - \phi) = A(t) \cos(2\pi(f_r + \Delta f)t - \phi)$;

non necessariamente alla stessa frequenza del riferimento;

$A(t)$ è lentamente variabile nel tempo rispetto al tempo di integrazione del filtro.

- **processo casuale** con spettro $S_n(f)$

Per quanto riguarda il primo tipo di contributi, il segnale di uscita dal rivelatore sincrono è:

$$u_s(t) = A(t) \cos(2\pi(f_r + \Delta f)t - \phi) \cos(2\pi f_r t)$$

quando $\Delta f = 0$, il segnale ha la stessa frequenza del riferimento:

$$u_s(t) = A(t) [(1 + \cos(4\pi f_r t)) \cdot \cos\phi + \sin(4\pi f_r t) \cdot \sin\phi]$$

all'uscita del filtro rimane $i(t) = A(t) \cdot \cos\phi$

Nel caso di un segnale a frequenza diversa da quella del riferimento ($\phi = 0$)

$$\begin{aligned} u_s(t) &= A(t) \cos(2\pi(f_r + \Delta f)t) \cos(2\pi f_r t) = \\ &= A(t) [\cos^2(2\pi f_r t) \cos(2\pi \Delta f t) - \cos(2\pi f_r t) \sin(2\pi f_r t) \cos(2\pi \Delta f t)] \end{aligned}$$

all'uscita del filtro rimane il contributo $A(t) \cos(2\pi \Delta f t)$;

se Δf rientra nella banda passante del filtro, altrimenti verrà attenuata.

In entrambe i casi abbiamo uno spostamento in frequenza del segnale

...per quanto riguarda la parte casuale eseguiamo l'autocorrelazione del segnale prodotto fra riferimento e segnale casuale, ricordando che moltiplicare due segnali nel dominio del tempo significa, nel dominio della frequenza di Fourier, eseguire la loro convoluzione.

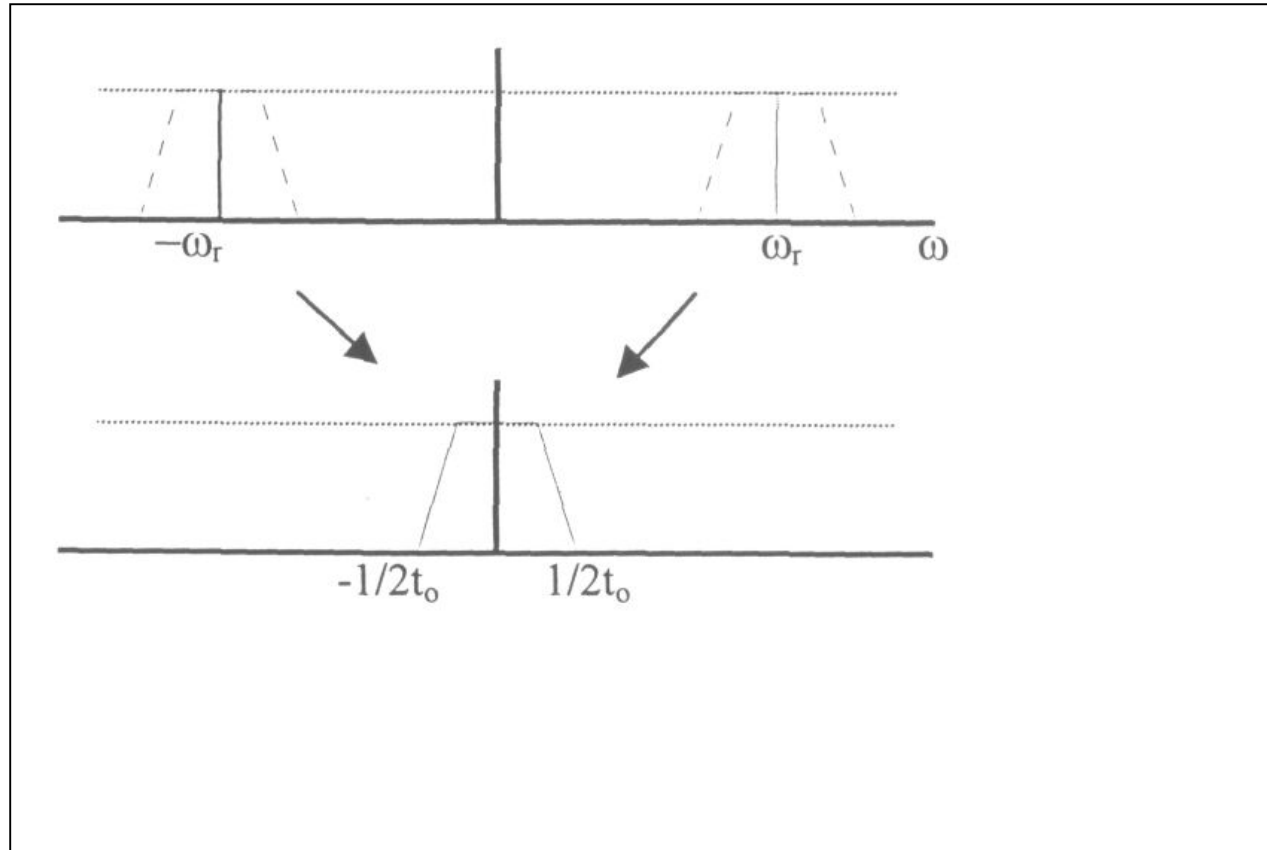
Se $n(t)$, componente casuale in ingresso, e $r(t)$ riferimento sono indipendenti all'uscita del rivelatore abbiamo $R_u(\tau) = R_n(\tau) R_r(\tau) = R_n(\tau) \cos(2\pi f_r \tau)$

A cui corrisponde lo spettro:
$$S_u(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_n(\tau) \cos(2\pi f_r \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

che corrisponde a alla traslazione dello spettro del processo casuale

$$S_u(f) = S_n(f - f_r) + S_n(f + f_r)$$

N.B. in questo caso stiamo facendo riferimento a spettri bilaterali!!!



Lo spettro ottenuto viene poi filtrato:

$$S_i(f) = S_q(f) = \frac{1}{1 + (f / f_{-3dB})} (S_n(f_r + f) + S_r(f_r - f))$$

La varianza del rumore prodotta dal processo casuale a ciascuna delle due uscite si calcola immediatamente integrando sulla banda del filtro.

Se il rumore ha uno spettro costante attorno ad f_r e ricordandoci della banda equivalente del filtro del 1° ordine otteniamo:

$$\sigma_i^2 = \sigma_q^2 = S_n(f_r) \cdot B_n = \left(\frac{\pi}{2}\right) f_{-3dB} S_n(f_r)$$

esempio

sinusoide a 1 kHz, ampiezza **10 μ V** in presenza di un rumore con densità spettrale attorno a questa frequenza pari a **10 $(\mu$ V)²/Hz**.

Se osserviamo questo segnale direttamente con una banda anche solo di 10 kHz il rapporto segnale/rumore $\approx 1/1000$ (-30 dB).

Utilizzando un lock-in e **integrando per 100s** il rumore (la sua varianza) viene ridotta di un fattore 10: $S/N \approx 1/100$ (-20 dB).

lock-in - sommario,

- amplificazione "a basso rumore" in alternata;
evito offset, flicker e derive.
- misure fisiche: applico uno stimolo alla frequenza di demodulazione oppure provvedo a modulare qualche parametro dell'apparato sperimentale

esempio: amplificatori a chopper; questa tecnica era largamente utilizzata per realizzare amplificatori in continua ad alto guadagno, di precisione. Il segnale d'ingresso viene modulato moltiplicandolo per un'onda quadra di frequenza fissa e ampiezza costante; l'onda quadra così ottenuta viene amplificata e demodulata per riottenere un segnale in continua.

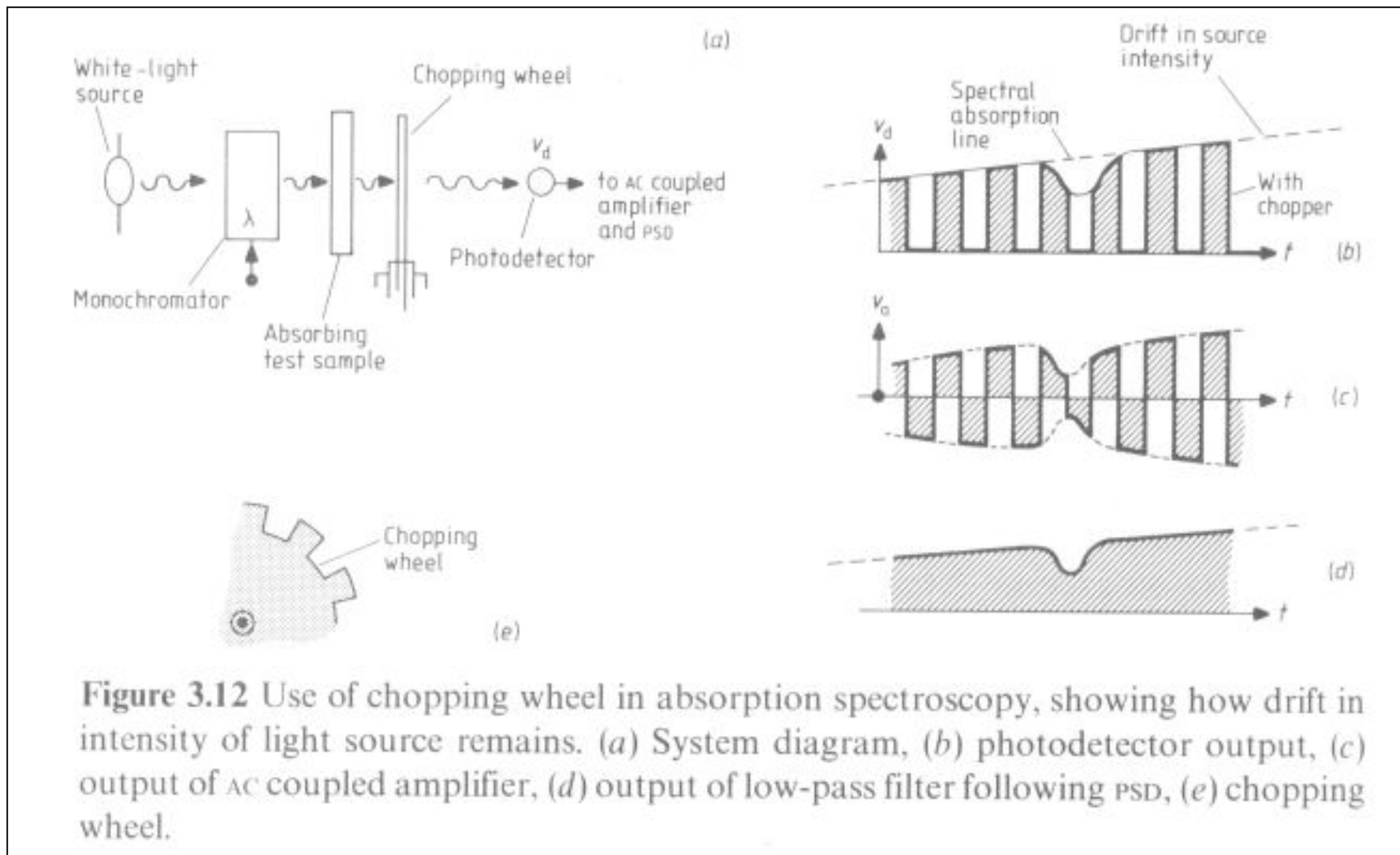
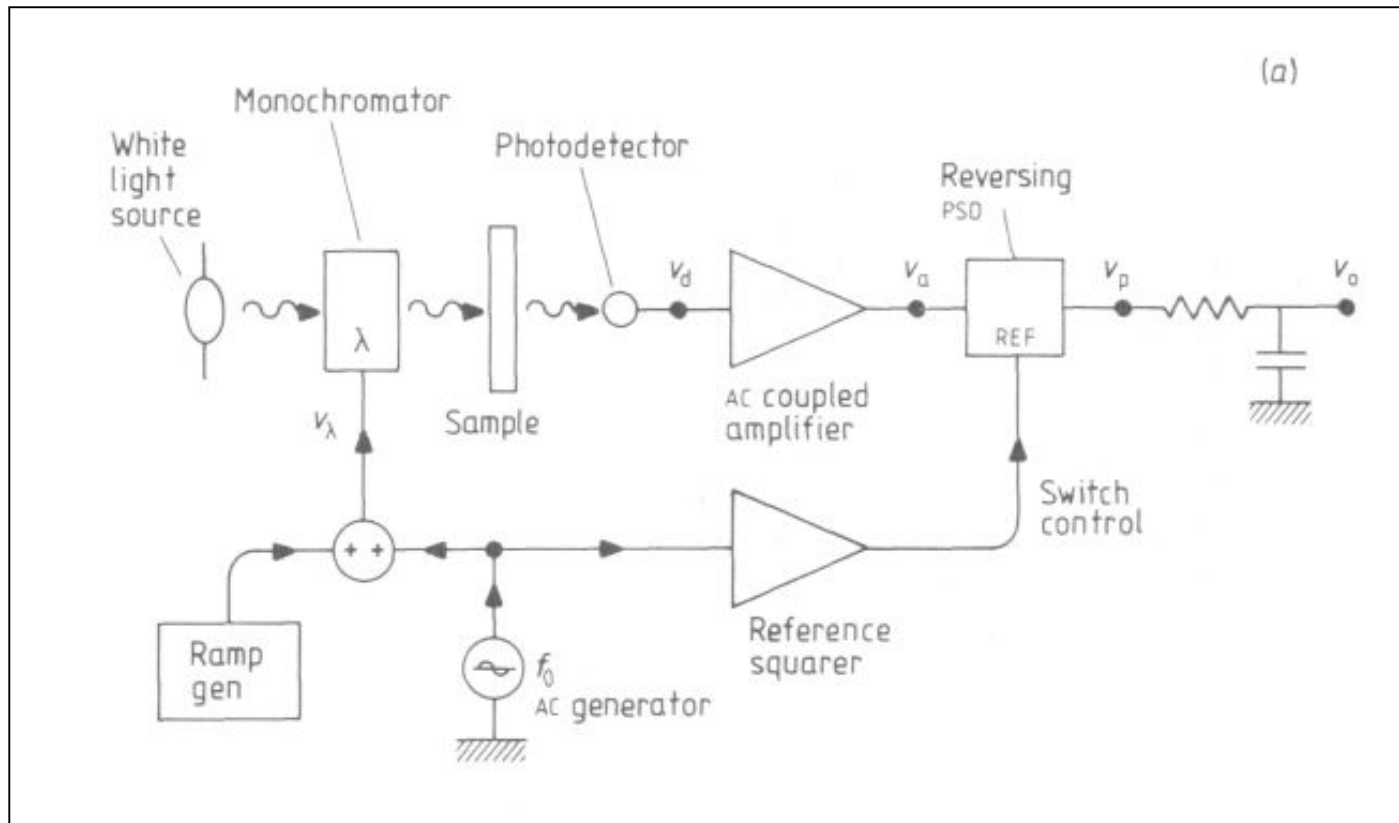


Figure 3.12 Use of chopping wheel in absorption spectroscopy, showing how drift in intensity of light source remains. (a) System diagram, (b) photodetector output, (c) output of AC coupled amplifier, (d) output of low-pass filter following PSD, (e) chopping wheel.

modulazione derivativa



in questo caso si modula non il fascio di luce ma una variabile indipendente, la lunghezza d'onda del monocromatore;

La tecnica prende il nome di modulazione derivativa perchè il segnale di uscita rappresenta la derivata prima del picco di assorbimento

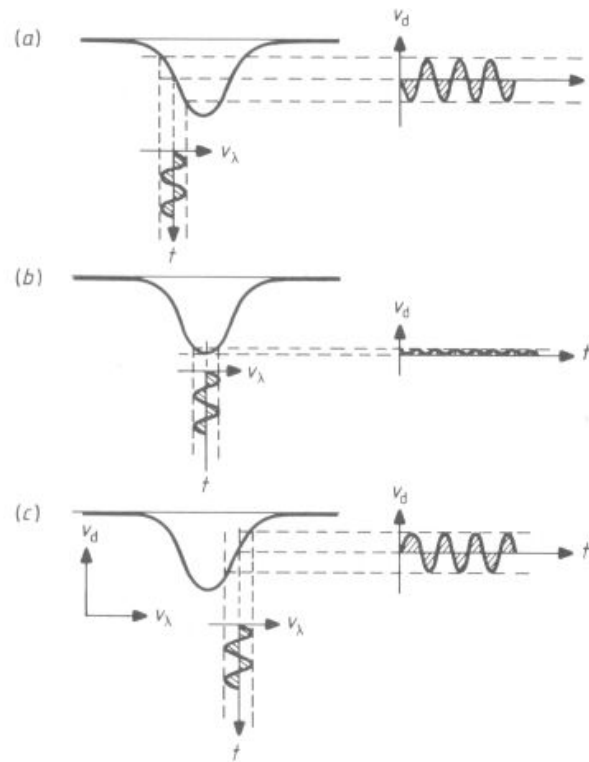


Figure 3.14 Relation between curves (b)–(d) of figure 3.13 for three fixed values of the ramp generator output, with the modulation applied.

modulazione < larghezza della riga d'assorbimento

Bibliografia

- [1] T.H. Wilshurst, Signal recovery from noise in electronic instrumentation, 2nd Ed., Adam Hilger, 1990[2] G.V. Pallottino, Appunti dal corso segnale/rumore, dottorato fisica, Univ. "La Sapienza", Roma, 1998
- [3] B.M. Dwork, Detection of a pulse superimposed on fluctuation noise, Proc. IRE, luglio 1950
- [3] H.H. Klein, G. Klempt, L. Storm, Measurement of the Thermodynamic temperature of He⁴ at various vapour pressures by a noise thermometer, Metrologia 1979, vol. 15, p. 143;
- [4] R.H. Brown, R.Q. Twiss, Correlation between photons in two coherent beams of light, Nature, January 1956, p. 27
- [5] M. Sampietro, L. Fasoli, G. Ferrari, Spectrum analyzer with noise reduction by cross-correlation technique on two channels, Review of Scientific Instruments, Vol. 70, #5, p. 2520
- [6] Oliver, Cage, Electronic measurements and instrumentation, Mc Graw Hill, 1975
- [7] L. Franks, Signal theory, Prentice Hall, 1969
- [8] R. Hanbury Brown FRS, The Intensity Interferometer, Taylor & Francis, 1974